Teorema Fundamental para Curvas no Espaço

(i) dadas duas funções $C^\infty(I)$, $K, \tau : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $K(s) > 0$ $\forall s \in I$ então existe uma curva dif. $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ ppca tal que $K_\alpha(s) = K(s)$ e $\tau_\alpha(s) = \tau(s)$ $\forall s \in I$.

(ii) A curva α em (i) é única se impormos condições iniciais $\alpha(s_0) = p_0 \in \mathbb{R}^3$, $\alpha'(s_0) = v \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha''(s_0) = K(s_0).w$ com v, w unitários.

(iii) Se $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ é outra curva ppca com $K_\beta = K$ e $\tau_\beta = \tau$ então existe um movimento rígido T de $\mathbb{R}^3$ com $\beta = T \circ \alpha$.

Demonstração:

(ii) Seja $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^3$ curvas ppca tal que $K_\alpha = K = K_\beta$, $\tau_\alpha = \tau = \tau_\beta$ e $\alpha(s_0) = p_0 = \beta(s_0)$, $\alpha'(s_0) = v = \beta'(s_0)$ e $\alpha''(s_0) = K(s_0).w = \beta''(s_0)$

Defina:

$$f(s) = \frac{1}{2}\left(|t_\alpha(s) - t_\beta(s)|^2 + |\eta_\alpha(s) - \eta_\beta(s)|^2 + |b_\alpha(s) - b_\beta(s)|^2 \right)$$

E claramente $f(s_0) = 0$ pois

- $t_\alpha(s_0) = t_\beta(s_0)$
- $\eta_\alpha(s_0) = \dfrac{\alpha''(s_0)}{\|\alpha''(s_0)\|} = \dfrac{\beta''(s_0)}{\|\beta''(s_0)\|} = \eta_\beta(s_0)$.

$\cdot \; b_\alpha(s_0) = t_\alpha(s_0) \times \eta_\alpha(s_0)$
$\quad = t_\beta(s_0) \times \eta_\beta(s_0)$
$\quad = b_\beta(s_0)$

Além disso

$$f'(s) = \langle t_\alpha'(s) - t_\beta'(s), t_\alpha(s) - t_\beta(s) \rangle + \langle \eta_\alpha'(s) - \eta_\beta'(s), \eta_\alpha(s) - \eta_\beta(s) \rangle + \langle b_\alpha'(s) - b_\beta'(s), b_\alpha(s) - b_\beta(s) \rangle$$

Fórmulas de Frenet

$$= K(s) . \langle \eta_\alpha(s) - \eta_\beta(s), t_\alpha(s) - t_\beta(s) \rangle \quad (\mathrm{I})$$
$$- K(s) . \langle t_\alpha(s) - t_\beta(s), \eta_\alpha(s) - \eta_\beta(s) \rangle$$
$$- \tau(s) . \langle b_\alpha(s) - b_\beta(s), \eta_\alpha(s) - \eta_\beta(s) \rangle \quad (\mathrm{II})$$
$$+ \tau(s) . \langle \eta_\alpha(s) - \eta_\beta(s), b_\alpha(s) - b_\beta(s) \rangle \quad (\mathrm{III})$$
$$= 0 \quad , \forall s \in I$$

$$\Rightarrow f(s) = 0 \;\forall s \in I \quad \Rightarrow \begin{cases} t_\alpha(s) = t_\beta(s) \\ \eta_\alpha(s) = \eta_\beta(s) \\ b_\alpha(s) = b_\beta(s) \end{cases}$$

Mas $t_\alpha(s) = t_\beta(s) \Leftrightarrow \alpha'(s) = \beta'(s) \quad , \forall s \in I$
$\Rightarrow (\alpha - \beta)(s) = cte.$

Como $\alpha(s_0) = p_0 = \beta(s_0) \Rightarrow \alpha(s) = \beta(s) \;, \forall s \in I.$

(iii) Observe inicialmente que se $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ é uma curva dif. ppca e $\gamma \doteq T \circ \beta$ para algum movimento rígido T com $T(p) = A(p) + v$, $A \in O(3)$ então

- $t_\gamma(s) = A(t_\beta(s))$
- $\eta_\gamma(s) = A(\eta_\beta(s))$
- $b_\gamma(s) = \pm A(b_\beta(s))$
- $k_\gamma(s) = k_\beta(s)$
- $\tau_\gamma(s) = \pm \tau_\beta(s)$

NO QUAL O SINAL É + SE A PRESERVA ORIENTAÇÃO E É − CASO CONTRÁRIO. DE FATO,

$$\boxed{t_\gamma(s)} = \gamma'(s) = dT(\beta(s)).\beta'(s) = A(\beta'(s)) = \boxed{A(t_\beta(s))}.$$

Agora

$$\gamma''(s) = t_\gamma'(s) = dA(t_\beta(s)).t_\beta'(s) = A(t_\beta'(s))$$
$$= A(k_\beta(s).\eta_\beta(s))$$
$$= k_\beta(s).A(\eta_\beta(s)).$$

$$\therefore \boxed{k_\gamma(s)} = \|\gamma''(s)\| = k_\beta(s).|A(\eta_\beta(s))|$$
$$= \boxed{k_\beta(s)}$$

E

$$\boxed{\eta_\gamma(s)} = \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|} = \frac{\gamma''(s)}{k_\beta(s)} = \frac{k_\beta(s)\,A(\eta_\beta(s))}{k_\beta(s)} = \boxed{A(\eta_\beta(s))}$$

MAS

$$\langle A(b_\beta(s)), t_\gamma(s)\rangle = \langle A(b_\beta(s)), A(t_\beta(s))\rangle = \langle b_\beta(s), t_\beta(s)\rangle = 0$$

$$\langle A(b_\beta(s)), \eta_\gamma(s)\rangle = \langle A(b_\beta(s)), A(\eta_\beta(s))\rangle = \langle b_\beta(s), \eta_\beta(s)\rangle = 0$$

$$\Rightarrow A(b_\beta(s)) \perp t_\gamma(s), \eta_\gamma(s) \quad \text{E} \quad \|A(b_\beta(s))\| = 1.$$

CONCLUSÃO: $A(b_\beta(s)) = \pm b_\gamma(s)$ (SINAL DEPENDE DA ORIENTAÇÃO)

Por fim,

$$\tau_\gamma(s) = \langle b'_\gamma(s), \eta_\gamma(s) \rangle$$

$$= \langle \pm A(b'_\beta(s)), A(\eta_\beta(s)) \rangle$$

$$= \pm \langle b'_\beta(s), \eta_\beta(s) \rangle = \pm \tau_\beta(s)$$

Objetivo: precisamos definir $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ um movimento rígido dado por $T(p) = A(p) + v$ no qual $A \in O(3)$ e $\beta = T \circ \alpha$.

Defino $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ op. linear no qual

$$A(t_\alpha(s_0)) = t_\beta(s_0)$$
$$A(\eta_\alpha(s_0)) = \eta_\beta(s_0)$$
$$A(b_\alpha(s_0)) = b_\beta(s_0)$$

e $v \doteq \beta(s_0) - A(\alpha(s_0))$

Afirmação: $\gamma(s) = \beta(s)$ no qual $\gamma \doteq T \circ \alpha$.

Pela parte anterior temos

- $\gamma(s_0) = T(\alpha(s_0)) = A(\alpha(s_0)) + v$
$$= A(\alpha(s_0)) + \beta(s_0) - A(\alpha(s_0))$$
$$= \beta(s_0)$$

$$\cdot\ \gamma'(s_0) = A(t_\alpha(s_0)) \overset{\text{def. de } A}{=} t_\beta(s_0) = \beta'(s_0)$$

$$\cdot\ \gamma''(s_0) = t'_\gamma(s_0) = A(t'_\alpha(s_0))$$
$$= A(k_\alpha(s_0) \cdot \eta_\alpha(s_0))$$
$$\text{def. de } A \leftarrow\ = k_\alpha(s_0) \cdot A(\eta_\alpha(s_0))$$
$$+\ k_\beta = k = k_\alpha \quad = k_\beta(s_0) \cdot \eta_\beta(s_0)$$
$$= \beta''(s_0)$$

Portanto $\gamma(s_0) = \beta(s_0)$, $\gamma'(s_0) = \beta'(s_0)$, $\gamma''(s_0) = \beta''(s_0)$ e além disso

$k_\gamma(s) = k_\alpha(s) = \underbrace{k_\beta(s)}_{\text{hipótese}}$ e $\tau_\gamma(s) = \pm\tau_\alpha(s) = \pm\tau_\beta(s)$

Pelo item (ii) temos $\gamma(s) = \beta(s)$, $\forall s \in I$.

(i) Vamos utilizar o seguinte resultado de EDO: dada uma função $A : I \subseteq \mathbb{R} \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $X_0 \in \mathbb{R}^n$ → suave (C^∞).

Existe uma única função suave $X : I \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$\begin{cases} X'(t) = A(t) \cdot X(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}, \forall t \in I$$

Podemos olhar as fórmulas de Frenet em

$$\begin{cases} t'(s) = k(s) \cdot \eta(s) \\ \eta'(s) = -k(s) \cdot t(s) - \tau(s)\, b(s) \\ b'(s) = \tau(s) \cdot \eta(s) \end{cases}$$

Em coordenadas, isto é,

/ /

$$t'(s) = k(s).\eta(s) \iff \begin{cases} t_1'(s) = k(s).\eta_1(s) \\ t_2'(s) = k(s).\eta_2(s) \\ t_3'(s) = k(s).\eta_3(s) \end{cases}$$

$$\eta'(s) = -k(s)t(s) - \tau(s).b(s) \iff \begin{cases} \eta_1'(s) = -k(s).t_1(s) - \tau(s).b_1(s) \\ \eta_2'(s) = -k(s).t_2(s) - \tau(s).b_2(s) \\ \eta_3'(s) = -k(s).t_3(s) - \tau(s).b_3(s) \end{cases}$$

$$b'(s) = \tau(s).\eta(s) \iff \begin{cases} b_1'(s) = \tau(s).\eta_1(s) \\ b_2'(s) = \tau(s).\eta_2(s) \\ b_3'(s) = \tau(s).\eta_3(s) \end{cases}$$

Defina

$$X(s) = \begin{pmatrix} t_1(s) \\ t_2(s) \\ t_3(s) \\ \eta_1(s) \\ \eta_2(s) \\ \eta_3(s) \\ b_1(s) \\ b_2(s) \\ b_3(s) \end{pmatrix}_{9\times 1} \quad \text{e} \quad A(s) = \begin{pmatrix} O_3 & k(s)I_3 & O_3 \\ -k(s)I_3 & O_3 & -\tau(s)I_3 \\ O_3 & \tau(s)I_3 & O_3 \end{pmatrix}$$

no qual O_3 e I_3 são respect. as matrizes nula 3×3 e identidade 3×3.

Pelo teorema anterior (E.D.O) existem $t(s), \eta(s), b(s)$ suaves em I satisf. as for. de Frenet e tais que

$\{t(s_0), \eta(s_0), b(s_0)\}$ é uma base ortonormal.

↳ imposição do P.V.I.

Afirmação: $\{t(s), \eta(s), b(s)\}$ é uma base ortonormal $\forall s \in I$

Para isso considere as funções

$f_{11}(s) \doteq \langle t(s), t(s)\rangle$
$f_{12}(s) \doteq \langle t(s), \eta(s)\rangle$
$f_{13}(s) \doteq \langle t(s), b(s)\rangle.$
$f_{21}(s) \doteq \langle \eta(s), t(s)\rangle$
$f_{22}(s) \doteq \langle \eta(s), \eta(s)\rangle$
$f_{23}(s) \doteq \langle \eta(s), b(s)\rangle$
$f_{31}(s) \doteq \langle b(s), t(s)\rangle$
$f_{32}(s) \doteq \langle b(s), \eta(s)\rangle$
$f_{33}(s) \doteq \langle b(s), b(s)\rangle.$

Obs.: $f_{ij}(s) = f_{ji}(s).$
e $f_{ij}(s_0) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

Agora

- $f_{11}'(s) = 2\langle t'(s), t(s)\rangle = 2k(s).\langle \eta(s), t(s)\rangle = 2k(s) f_{21}.$
- $f_{12}'(s) = \langle t'(s), \eta(s)\rangle + \langle t(s), \eta'(s)\rangle.$
  $= k(s)\langle \eta(s), \eta(s)\rangle - k(s)\langle t(s), t(s)\rangle - \tau(s)\langle t(s), b(s)\rangle$
  $= k(s).f_{22}(s) - k(s).f_{11}(s) - \tau(s) f_{13}(s)$
- $f_{13}'(s) = \langle t'(s), b(s)\rangle + \langle t(s), b'(s)\rangle$
  $= k(s).\langle \eta(s), b(s)\rangle + \tau(s).\langle t(s), \eta(s)\rangle$
  $= k(s).f_{23}(s) + \tau(s).f_{12}(s)$
- $f_{21}'(s) = f_{12}'(s)$
  $= k(s).f_{22}(s) - k(s).f_{11}(s) - \tau(s).f_{13}(s)$
- $f_{22}'(s) = 2\langle \eta'(s), \eta(s)\rangle$
  $= -2k(s).\langle t(s), \eta(s)\rangle - 2\tau(s)\langle b(s), \eta(s)\rangle$
  $= -2k(s).f_{12}(s) - 2\tau(s) f_{23}(s)$
- $f_{23}'(s) =$ Exercício.
- $f_{31}'(s) = f_{13}'(s)$
- $f_{32}'(s) = f_{23}'(s)$
- $f_{33}'(s) =$ Exercício.

/ /

EXERCÍCIO ESCREVER A MATRIZ.

Então temos
$$\begin{pmatrix} f_{11}'(s) \\ f_{12}'(s) \\ \vdots \\ f_{33}'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11}(s) \\ f_{12}(s) \\ \vdots \\ f_{33}(s) \end{pmatrix}$$

Por outro lado $g_{ij}(s) = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ p/ $i,j = \{1, .., 3\}$

satisfaz o sist. de EDO acima $\Rightarrow$ unicidade $g_{ij}(s) = f_{ij}(s)$ $\forall s \in I$ pois $g_{ij}(s_0) = f_{ij}(s_0)$

Conclusão: $\{t(s), \eta(s), \beta(s)\}$ é uma base ortonormal $\forall s \in I$.

Por fim defina $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ dada por $\alpha'(s) = t(s)$.