Exemplos e aplicações

Na aula passada vimos que se $T: E \to E$ é um operador não negativo então existe (único) $S: E \to E$ não negativo tal que $T = S^2$. Além do mais S é a única raiz não negativa de T.

Entretanto T pode ter outras raízes (claramente não são op. não negativos).

Exemplo: $T = I: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ temos que

$I = I^2$ e $I = S^2$, no qual $S(x,y) = (2x-y, 3x-2y)$

↳ única raiz não negativa.

Note que no exemplo anterior I (identidade) é uma matriz diagonalizável.

Pergunta: $T: E \to E$ é diagonalizável então T possui raiz quadradra?

Lembrando que T é diagonalizável se existe uma base β de E formada por autovetores de T.

Ex.: T é auto adjunto $\Rightarrow$ T é diagonalizável.

Claramente a recíproca é falsa.

Considere $T(x,y) = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 28 \\ 7 & 29 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (8x+28y, 7x+29y)$

/ /

$$p_A(\lambda) = (8-\lambda).(29-\lambda) - 7.28$$
$$= \lambda^2 - 37\lambda + 8.29 - 7.28$$
$$= \lambda^2 - 37\lambda + 36$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 37 \\ \lambda_1 . \lambda_2 = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 36 \end{array}$$

$E_{\lambda_1} = \langle v_1 \rangle$, pois $\mathbb{R}^2 = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2}$

$E_{\lambda_2} = \langle v_2 \rangle$

E_{λ_1} ? $v \in E_{\lambda_1} \Leftrightarrow (A - \lambda_1 Id)v = 0$ com $\boxed{\lambda_1 = 1}$

$$\begin{pmatrix} 8-1 & 28 \\ 7 & 29-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 7x + 28y = 0 \\ x = -4y. \end{array}$$

$$v = (x,y) = (-4y, y) = y.(-4,1), \ \forall y \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{(-4,1)}{\|(-4,1)\|} = \frac{1}{\sqrt{17}}.(-4,1)$$

E_{λ_2} ? $v \in E_{\lambda_2} \Leftrightarrow (A - \lambda_2 Id)v = 0$ com $\boxed{\lambda_2 = 36}$

$$\begin{pmatrix} 8-36 & 28 \\ 7 & 29-36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 7x - 7y = 0 \\ x = y. \end{array}$$

$$v = (x,y) = (y,y) = y.(1,1), \ \forall y \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\Rightarrow v_2 = \frac{(1,1)}{\|(1,1)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$$

obs.: $\beta = \{v_1, v_2\}$ é uma base para $\mathbb{R}^2$

(note que a base não é ortonormal pois se fosse, pela recíproca do Teorema Espectral T deveria ser auto adjunto $\Leftrightarrow$ A simétrica, que não é!)

$$T v_1 = \lambda_1 v_1 = \lambda_1 v_1 + 0 v_2 = 1 v_1 + 0 v_2$$
$$T v_2 = \lambda_2 v_2 = 0 . v_1 + \lambda_2 . v_2 = 0 v_1 + 36 v_2$$

$\Rightarrow$ $v = \tilde{x} v_1 + \tilde{y} v_2$ temos

$$T v = T(\tilde{x} v_1 + \tilde{y} v_2)$$
$$= \tilde{x} T(v_1) + \tilde{y} T v_2$$
$$= \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow \\ T(v_1) & T(v_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 36 \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$$

Qual a relação entre A e B? Lembrando que

$A = P^{-1} B P$, no qual P é a matriz mudança da base canônica para a base β.

$$P = \begin{pmatrix} \\ (e_1)_\beta & (e_2)_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

no qual $\begin{cases} e_1 = a v_1 + c v_2 \\ e_2 = b v_1 + d v_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1,0) = a . \frac{(-4,1)}{\sqrt{17}} + c \frac{(1,1)}{\sqrt{2}} \\ (0,1) = b . \frac{(-4,1)}{\sqrt{17}} + d . \frac{(1,1)}{\sqrt{2}} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -\dfrac{4a}{\sqrt{17}} + c\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 = \dfrac{a}{\sqrt{17}} + \dfrac{c}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} 0 = \dfrac{-4b}{\sqrt{17}} + \dfrac{d}{\sqrt{2}} \\ 1 = \dfrac{b}{\sqrt{17}} + \dfrac{d}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{\sqrt{17}}{\sqrt{2}} c \\ 1 = \dfrac{4c}{\sqrt{2}} + \dfrac{c}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} d = \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{17}} b \\ 1 = \dfrac{b}{\sqrt{17}} + \dfrac{4}{\sqrt{17}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = \dfrac{\sqrt{2}}{5} \\ a = -\dfrac{\sqrt{17}}{5} \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} b = \dfrac{\sqrt{17}}{5} \\ d = \dfrac{4\sqrt{2}}{5} \end{cases}$$

Logo $P = \begin{pmatrix} -\sqrt{17} & \sqrt{17} \\ \sqrt{2} & 4\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \dfrac{1}{5}$ e $\det P = -\dfrac{5\sqrt{17}\cdot\sqrt{2}}{5}$

Dica: $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \dfrac{1}{\det P}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 4\sqrt{2} & -\sqrt{17} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{17} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-\sqrt{17}\cdot\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} -4/\sqrt{17} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{17} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Dica 2: $P^{-1} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \end{pmatrix}$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \uparrow \quad \uparrow$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad v_1 \quad v_2$

logo é mais fácil começar por P^{-1} e depois determinar P

spiral

VAMOS VERIFICAR SE NOSSOS CÁLCULOS ESTÃO CORRETOS!

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -4/\sqrt{17} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{17} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 36 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} -\sqrt{17} & \sqrt{17} \\ \sqrt{2} & 4\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{P} \cdot \frac{1}{5} =$$

$$\begin{pmatrix} -4/\sqrt{17} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{17} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{17} & \sqrt{17} \\ 36\sqrt{2} & 144\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} =$$

$$\begin{pmatrix} +4+36 & -4+144 \\ -1+36 & 1+144 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 28 \\ 7 & 29 \end{pmatrix}}_{A}$$

Observe que $S(\tilde{x},\tilde{y}) = \begin{pmatrix} \sqrt{1} & 0 \\ 0 & \sqrt{36} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}}_{D}\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$$

É raiz quadrada de $T(\tilde{x},\tilde{y})$ isto é

$$D^2 = B$$

Claramente temos um candidato a $\sqrt{A}$. Defina

$\sqrt{A} \doteq P^{-1} D P$ identidade matricial

$$\Rightarrow (P^{-1}DP)^2 = (P^{-1}DP).(P^{-1}DP)$$
$$= P^{-1}D\underbrace{P.P^{-1}}_{I}DP$$
$$= P^{-1}.D^2.P$$
$$= P^{-1}.B.P$$
$$= A$$

spiral

Note que $P^{-1}DP$ é a matriz de S em relação à base canônica. Assim

$$S(x,y) = \begin{pmatrix} -4/\sqrt{17} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{17} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{17}/5 & \sqrt{17}/5 \\ \sqrt{2}/5 & 4\sqrt{2}/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4/\sqrt{17} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{17} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{17}/5 & \sqrt{17}/5 \\ 6\sqrt{2}/5 & 24\sqrt{2}/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (2x+4y,\ x+5y)$$

Note que

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 28 \\ 7 & 29 \end{pmatrix}$$

$\therefore\ S^2 = T$ isto é $\sqrt{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

Existem outras possibilidades para $\sqrt{A}$?

$D_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow D_1^2 = B$

$D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow D_2^2 = B$

$D_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow D_3^2 = B$

$\therefore\ S_1 = P^{-1}D_1P,\ S_2 = P^{-1}D_2P,\ S_3 = P^{-1}D_3P$

tbm são raízes de A.

Exercício: Calcule todas as possibilidades de

$$\sqrt{\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}}$$

Curiosidade: dada uma matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ podemos ter infinitas sol. para $\sqrt{A}$?

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ então

$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ e $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ são tais que $B_1^2 = B_1^2 = A$.

obs.: uma matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ pode não ter raiz quadrada

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Suponha $\exists\ B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que $B^2 = A$

$$\Rightarrow \quad B^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$\underset{\overset{\|}{\underset{0}{\det A}}}{\det B^2} = \det B . \det B = (\det B)^2 \Rightarrow \det B = 0$$

$$\Leftrightarrow ad - cb = 0$$

Agora

(I) $a^2 + bc = 0$

$c.(a+d) = 0 \Rightarrow c = 0$ ou $a = -d$

(II) $bc + d^2 = 0$

(III) $b.(a+d) = 1$

- $c = 0$

Por (I) $a = 0$

Por (II) $d = 0$

Logo b é livre

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $a = -d$

Por (III) é uma contradição!