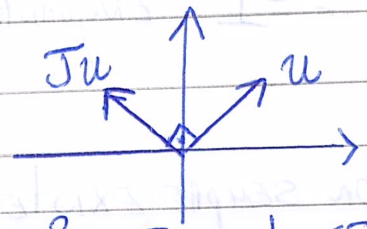
Raiz quadrada de operadores

Exemplo: Considere $J: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação rotação de $90°$ no sentido anti-horário



Então $J^2 = -I$. isto é $J(Jv) = -v$, $\forall v \in \mathbb{R}^2$. De

fato $Jv = J(x,y) = \begin{pmatrix} \cos 90° & -\operatorname{sen} 90° \\ \operatorname{sen} 90° & \cos 90° \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\boxed{v=(x,y)}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-y, x)$$

Note que $-I$ é um operador auto adjunto e negativo.

Exemplo2: Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x,y) = (2x-y, 3x-2y)$
Então $T^2 = I$.

De fato, a matriz de T em relação a base canônica é

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = I$$

justificativa

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 & -2+2 \\ 6-6 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Note que I é um operador autoadjunto e positivo.

Definição: Um operador $X: E \to E$ é chamado raiz quadrada do operador $A: E \to E$ quando $X^2 = A$. Denotamos por $X = \sqrt{A}$ (simbolicamente).

No exemplo 1 vimos que $J^2 = -I$ enquanto que no exemplo 2 $T^2 = I$.

Pergunta: A raíz de um operador sempre existe? Ela é única?

De fato a unicidade não é válida em geral, pois no exemplo 2 temos $T^2 = I$ e $I^2 = I$ com $T \neq I$.

Observação: Seja $T: E \to E$ dada por $T = \lambda I$ com $\lambda > 0$

Exemplo: $T(x,y) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\lambda x, \lambda y) = \lambda . (x,y)$

Então a $\boxed{\text{única}}$ raiz quadrada $\boxed{\text{não negativa}}$ de T é $S: E \to E$ dada por $S = \sqrt{\lambda} I$ que é um operador não negativo

Claramente $S^2 = (\sqrt{\lambda} I)^2 = \sqrt{\lambda} . \sqrt{\lambda} . I^2 = \lambda I = T$.

Unicidade

Suponhamos $\tilde{S}: E \to E$ tal que $\tilde{S}^2 = T$ e $\tilde{S}$ não negativa

Pelo Teorema espectral existe uma base de auto vetores $\{v_1, \dots, v_n\}$ ortonormal de E tais que $\tilde{S}(v_i) = \lambda_i v_i$ para $i = 1, \dots, n$

Basta demonstrarmos que todos os autovalores de $\tilde{S}$ são iguais a $\sqrt{\lambda}$, isto é $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \sqrt{\lambda} \Rightarrow \tilde{S} = S$.
De fato

$$\lambda_i^2 v_i = \lambda_i(\lambda_i v_i) = \lambda_i(\tilde{S} v_i) = \tilde{S}(\lambda_i v_i)$$
$$= \tilde{S}(\tilde{S} v_i)$$
$$= \tilde{S}^2 v_i$$
$$= T v_i = \lambda v_i$$

$\Rightarrow \lambda_i^2 = \lambda \therefore \lambda_i = \sqrt{\lambda}, \forall i = 1, .., n.$ $\hookrightarrow$ def. de T.

O exemplo anterior pode ser generalizado no próximo teorema.

Teorema: Seja $T: E \to E$ um op. linear não negativo. Então T possui uma única raiz quadrada não negativa, isto é existe um único operador não negativo $S: E \to E$ tal que $S^2 = T$. Além disso S positivo $\Leftrightarrow$ T é positivo.

dem.: Como T é não negativo, pelo Teorema espectral para op. auto-adjuntos

$E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_n}$, no qual E_{λ_j} são os auto-espaços de E associados aos autovalores $\lambda_1, .., \lambda_n$. Em particular

$$T\Big|_{E_j} = \lambda_j I \Leftrightarrow T v = \lambda_j v, \forall v \in E_{\lambda_j}$$

Afirmação: $S^2 = T \Rightarrow ST = TS$, isto é os op. comutam

De fato, $ST = S.S^2 = S^2 S = TS$.

Pela Proposição da aula anterior cada E_{λ_j} é invariante por S

Logo podemos considerar $S|_{E_{\lambda_j}} : E_{\lambda_j} \to E_{\lambda_j}$

que é um op. não negativo satisfazendo

(*) $$\left(S|_{E_j}\right)^2 = T|_{E_j} = \lambda_j I$$

Pelo exemplo anterior $S|_{E_j} = \sqrt{\lambda_j}\, I$.

Agora $\forall v \in E$ temos $v = \underbrace{w_1}_{\in E_{\lambda_1}} + \dots + \underbrace{w_n}_{\in E_{\lambda_n}}$ e assim

$$S v = S w_1 + \dots + S w_n$$
$$= \sqrt{\lambda_1}\, w_1 + \dots + \sqrt{\lambda_n}\, w_n$$

Claramente

- $S^2 = T$

De fato $S^2 v = S(S v) = S(\sqrt{\lambda_1}\, w_1 + \dots + \sqrt{\lambda_n}\, w_n)$
$$= \sqrt{\lambda_1}\, S(w_1) + \dots + \sqrt{\lambda_n}\, S(w_n)$$
$$= \sqrt{\lambda_1} \cdot \sqrt{\lambda_1} \cdot w_1 + \dots + \sqrt{\lambda_n}\sqrt{\lambda_n}\, w_n$$
$$= \lambda_1 \cdot w_1 + \dots + \lambda_n w_n$$
$$= T w_1 + \dots + T w_n$$
$$= T(w_1 + \dots + w_n)$$
$$= T v$$

- S é auto adjunto, i.e. $\langle S v, u \rangle = \langle v, S u \rangle \ \forall u, v$

(exercício)

- S é não negativo.

De fato $\sqrt{\lambda_i} \geq 0 \ \forall i = 1, \dots, n$ são os autovalores de S.

- S é único por (*)

Exemplo: Calcule $\sqrt{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$

Sol.

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ e $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear cuja matriz na base canônica seja A. Claramente T é positivo pois $a_{11} = 1$ e $\det A = 1 > 0$. Pelo teorema anterior existe um op. positivo $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $S^2 = T$. Seja B a matriz de S na base canônica. Então $B^2 = A$.

Para encontrar B vamos seguir a receita da dem. do teorema, isto é encontrar os autovalores e autovetores associados a T.

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda).(2-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 3\lambda + 1$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

obs.: $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

$E_{\lambda_1} = ?$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} (1-\lambda_1)x - y &= 0 \\ -x + (2-\lambda_1)y &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore v_1 = (x,y) = (x, (1-\lambda_1)x) = x.\overbrace{(1, 1-\lambda_1)}^{v_1}$ são os autovetores

e $E_{\lambda_1} = \langle (1, 1-\lambda_1) \rangle = \langle \tilde{v}_1 \rangle$, $\tilde{v}_1 = \dfrac{(1, 1-\lambda_1)}{\|(1, 1-\lambda_1)\|}$

$E_{\lambda_2} = ?$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_2 & -1 \\ -1 & 2-\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} (1-\lambda_2)x - y = 0 \\ -1x + (2-\lambda_2)y = 0 \end{matrix}$$

$\therefore v_2(x,y) = (x, x.(1-\lambda_2)) = x.\overbrace{(1, 1-\lambda_2)}^{v_2}$ são autovetores

e $E_{\lambda_2} = \langle (1, 1-\lambda_2) \rangle = \langle \tilde{v}_2 \rangle$, $\tilde{v}_2 = \dfrac{(1, 1-\lambda_2)}{\|(1, 1-\lambda_2)\|}$

A matriz de S na base $\{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2\}$ é dada por

$$C = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

Agora vamos escrever o operador S em relação a base canônica.

$B = P^{-1} C P$ no qual P é a matriz de passagem da base canônica p/ $\{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2\} \doteq \beta$

$$P = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow \\ (e_1)_\beta & (e_2)_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_1(1-\lambda_1) \\ \beta_2 & \beta_2(1-\lambda_2) \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \beta_1 = \|v_1\|^{-1} \\ \beta_2 = \|v_2\|^{-1} \end{matrix}$$

$$e_1 = \beta_1 . \tilde{v}_1 + \beta_2 . \tilde{v}_2 = \langle e_1, \tilde{v}_1 \rangle \tilde{v}_1 + \langle e, \tilde{v}_2 \rangle . \tilde{v}_2$$
$$= \frac{1}{\|v_1\|} . \tilde{v}_1 + \frac{1}{\|v_2\|} \tilde{v}_2$$

$$e_2 = \langle e_2, \tilde{v}_1 \rangle \tilde{v}_1 + \langle e_2, \tilde{v}_2 \rangle . \tilde{v}_2$$
$$= \frac{1-\lambda_1}{\|v_1\|} . \tilde{v}_1 + \frac{1-\lambda_2}{\|v_2\|} \tilde{v}_2$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \cdot \begin{pmatrix} \beta_2 \cdot (1-\lambda_2) & -\beta_1(1-\lambda_1) \\ -\beta_2 & \beta_1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\beta_1 \cdot \beta_2 \cdot (\lambda_1 - \lambda_2)} \cdot \begin{pmatrix} \beta_2 \cdot (1-\lambda_2) & -\beta_1 \cdot (1-\lambda_1) \\ -\beta_2 & \beta_1 \end{pmatrix}$$

Exercício: Calcular B (verifique que $B^2 = A$).

Conclusão: $S\vartheta = B\vartheta$ para $\vartheta = (x,y)$ em relação a base canônica.

$$S(x,y) = \overbrace{P^{-1} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_1(1-\lambda_1) \\ \beta_2 & \beta_2(1-\lambda_2) \end{pmatrix}}^{B} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= P^{-1} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 x + \beta_1 \cdot (1-\lambda_1) y \\ \beta_2 x + \beta_2 (1-\lambda_2) y \end{pmatrix}$$

$$= P^{-1} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} \cdot \beta_1 [x + (1-\lambda_1) y] \\ \lambda_2 \beta_2 [x + (1-\lambda_2) y] \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\beta_1 \beta_2 (\lambda_1 - \lambda_2)} \begin{pmatrix} \beta_2 (1-\lambda_2) & -\beta_1 (1-\lambda_1) \\ -\beta_2 & \beta_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} \beta_1 [\ldots] \\ \lambda_2 \beta_2 [\ldots] \end{pmatrix}$$

$=$ continuar.

spiral