Operadores Normais

Def.: Um operador $T: E \to E$ é normal quando $TT^* = T^*T$

Ex. 1: T autoadjunto $\Rightarrow$ T normal, pois $T = T^*$

Ex. 2: $T: E \to E$ é anti-simétrico isto é $T^* = -T$ $\Rightarrow$ T é normal.

Ex. 3: T ortogonal $\Rightarrow$ T normal, pois $T^* = T^{-1}$
$\therefore T^*T = I = T \circ T^{-1} = TT^*$.

Proposição: O operador $T: E \to E$ é normal $\Leftrightarrow$ sua matriz em relação a alguma base ortonormal satisfaz $A \cdot A^t = A^t A$.

A demonstração segue os argumentos usuais e será omitida.

Exemplo: Seja $T: E \to E$ um op. linear tal que $\dim E = 2$. Seja $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ a matriz de T em relação a uma base ortonormal $\{u_1, u_2\}$ de E. Podemos descrever as possíveis formas de A?

$$T \text{ normal} \Leftrightarrow A A^t = A^t A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a^2+b^2 = a^2+c^2 \\ ab+cd = ac+bd \; (\star) \Rightarrow \\ b^2+d^2 = c^2+d^2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} b^2=c^2 \\ \\ b^2=c^2 \end{matrix}$$

$\therefore$ $b = \pm c$. ENTÃO

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ OU $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & d \end{pmatrix}$

SIMÉTRICA

Agora $b = -c$ POR $(\star)$ TEMOS $a(-c)+cd = ac-cd$

$c.(d-a) = c.(a-d)$

$E\ c \neq 0 \Rightarrow a = d$

Obviamente SE $c = 0 = b$ TEMOS

$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ $\therefore$ diagonalizável $\therefore$ simétrica.

Voltamos ao caso $c \neq 0$ e $a = d$.

$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. SE $v = (a, b)$ podemos escrevê-lo COMO $v = r.(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ NO QUAL

SEMELHANTE.

$$\begin{cases} a = r.\cos\theta \\ b = r.\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

para $r = \sqrt{a^2+b^2}$ e $\theta \in [0, 2\pi[$. Assim

$$A = r\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Conclusão: A é uma matriz simétrica ou uma matriz semelhante

Proposição: $T: E \to E$ normal $\Leftrightarrow |T^*v| = |Tv|, \forall v \in E$

dem.: De fato $|T^*v|^2 = |Tv|^2, \forall v \in E$

$$\langle T^*v, T^*v \rangle = \langle Tv, Tv \rangle, \forall v \in E$$

$$\langle TT^*v, v \rangle = \langle T^*Tv, v \rangle, \forall v \in E$$

$\Rightarrow TT^* = T^*T$?

$\boxed{\text{Cuidado:}}$ Conside $\begin{cases} J(x,y) = (-y, x) \\ S(x,y) = (0,0) \end{cases}$, duas transf. lineares $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Claramente,

$$\underbrace{\langle Jv, v \rangle}_{0} = \underbrace{\langle Sv, v \rangle}_{0}, \forall v \in \mathbb{R}^2$$

mas $J \neq S$

$\boxed{\text{Entretanto:}}$ $T_1, T_2: E \to E$ são auto adjuntos então

$$\langle T_1 v, v \rangle = \langle T_2 v, v \rangle, \forall v \in E$$

$\Rightarrow T_1 = T_2$.

De fato

$$\langle T_1(v+w), v+w \rangle = \langle T_1 v, v \rangle + \langle T_1 v, w \rangle + \langle T_1 w, v \rangle + \langle T_1 w, w \rangle$$

$$\stackrel{T_1 \text{ auto adjunto}}{=} \langle T_1 v, v \rangle + 2\langle T_1 v, w \rangle + \langle T_1 w, w \rangle$$

Assim

$$\langle T_1 v, w \rangle = \frac{1}{2}\left[\langle T_1(v+w), (v+w)\rangle - \langle T_1 v, v\rangle - \langle T_1 w, w\rangle \right]$$

Analog.

$$\langle T_2 v, w \rangle = \frac{1}{2}\left[\langle T_2(v+w), (v+w)\rangle - \langle T_2 v, v\rangle - \langle T_2 w, w\rangle \right]$$

Como o lado direito de ambos coincidem então

$$\langle T_1 v, w \rangle = \langle T_2 v, w \rangle \quad , \forall\, v, w \in E$$

$\iff T_1 = T_2$.

Voltando ao nosso caso $\left.\begin{array}{l} T_1 = T^* T \\ T_2 = T T^* \end{array}\right\}$ que são auto adjuntos

Agora se T é normal

$$\iff \langle T^* T v, v \rangle = \langle T T^* v, v \rangle \quad , \forall v \in E$$

$$\Rightarrow \langle T v, T v \rangle = \langle T^* v, T^* v \rangle \quad , \forall v \in E$$

$$\iff |T v| = |T^* v| \quad , \forall v \in E.$$

obs.: $T : E \to E$ é antisimétrico $\iff T^* = -T \iff A^t = -A$ no qual A é a matriz associada a T fixada uma base de E. Note que $A^t = -A \iff a_{ji} = -a_{ij}$. Em particular $a_{jj} = 0$.

Teorema espectral para operadores normais (caso real).

Seja $T: E \to E$ um operador normal. Então existe uma base ortonormal de E em relação a qual a matriz de T é

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & \lambda_r & & & & \\ & & & \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} & & & \\ & 0 & & & \ddots & & \\ & & & & & \begin{pmatrix} \alpha_r & -\beta_r \\ \beta_r & \alpha_r \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Corolário: Seja $T: E \to E$ um operador anti-simétrico. Então existe uma base ortonormal de E em relação a qual a matriz de T é:

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & 0 & & & & \\ & & & \begin{pmatrix} 0 & -\beta_1 \\ \beta_1 & 0 \end{pmatrix} & & & \\ & 0 & & & \ddots & & \\ & & & & & \begin{pmatrix} 0 & -\beta_r \\ \beta_r & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Dem.: T é anti-simétrico o único autovalor possível é $\lambda = 0$.
De fato, seja $v \neq 0$ tal que $Av = \lambda v$.

Como $\langle Aw, u \rangle = \langle w, A^*u \rangle$, $A^* = -A$
$= \langle w, -Au \rangle$
$= -\langle w, Au \rangle$, $\forall w, u \in E$

Seja $w = u = v$ então

$$\langle Av, v \rangle = -\langle v, Av \rangle$$
$$\langle \lambda v, v \rangle = -\langle v, \lambda v \rangle$$
$$\lambda \cdot \|v\|^2 = -\lambda \|v\|^2 \quad , v \neq 0$$
$$\Rightarrow \lambda = 0$$

A demonstração do teorema espectral será tópico da Lista de seminários.