Teorema espectral para op. ortogonais.

Vimos na aula passada que se $T: E \to E$ é uma transf. linear ortogonal então os únicos valores possíveis para os autovalores de T, caso possua, são ± 1.

Proposição: Se $T: E \to E$ é um op. ortogonal e $\dim E = 2$ então $T = I$ ou $T = -I$ ou existe uma base ortogonal $\{v, w\} \in E$ tal que

(i) $\begin{cases} Tv = v \\ Tw = -w \end{cases}$ (ii) $\begin{array}{l} Tv = \cos\theta . v + \operatorname{sen}\theta . w \\ Tw = -\operatorname{sen}\theta . v + \cos\theta . w \end{array}$

Observações:

(1) (i) representa uma reflexão em rel. a reta gerada por v.
(ii) " " rotação de θ em relação a origem no sist. $\{v, w\}$

(2) Do ponto de vista matricial, o operador pode ser escrito como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

em rel. a uma base $\{v, w\}$ de E.

demonstração da proposição: Pelo Teorema de caracterização se T é ortogonal então existe uma base ortonormal $\{u_1, u_2\}$ de E tal que a matriz de T em relação a essa base é dada por

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

(I) (II)

Se vale (I) $\Rightarrow$ (ii) tomando $u = u_1$ e $v = u_2$

Se vale (II) $\Rightarrow$ A matriz é simétrica

$\Rightarrow$ T é auto adjunto

$\Rightarrow$ pelo teorema espectral T é diagonalizá-vel

Logo como $\lambda = \pm 1$ são os únicos possíveis autovalores p/ T temos que numa base ortonormal de autovetores. $\{u, v\}$ segue

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Teorema espectral p/ operadores ortogonais. Seja $T: E \to E$ um operador ortogonal. Então existe uma base ortonormal de T em relação à qual a matriz de T é dada por.

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & 0 & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \operatorname{sen}\theta_1 \\ -\operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} & \\ & 0 & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \begin{pmatrix} \cos\theta_r & \operatorname{sen}\theta_r \\ -\operatorname{sen}\theta_r & \cos\theta_r \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Exemplo: Seja $T: E \to E$ um operador linear ortogonal e $\dim E = 3$ então existe uma base ortonormal de E em relação a matriz de T é:

$$\underset{(a)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}, \underset{(b)}{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}, \underset{(c)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}, \underset{(d)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

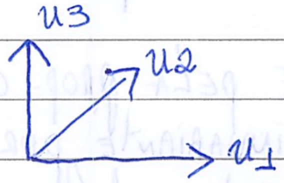
$$\underset{(e)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & +\operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}, \underset{(f)}{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}$$

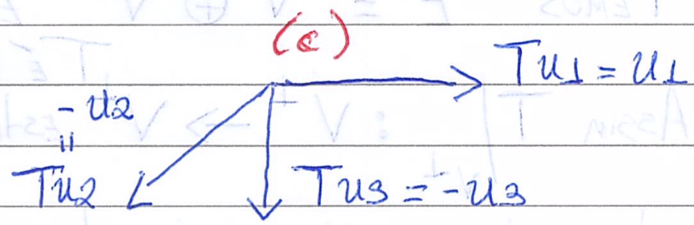
Geometricamente o operador T representa em relação a uma base ortonormal $\{u_1, u_2, u_3\}$ de E.

(a) $T = I$

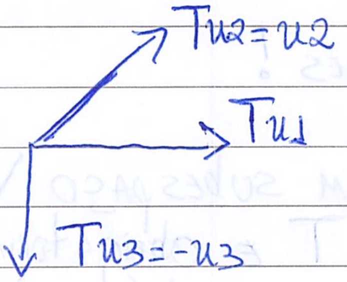
(b) $T = -I$

(c), (d)

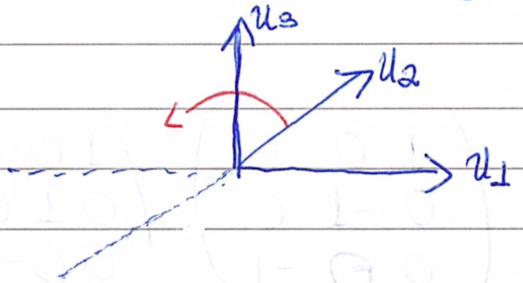


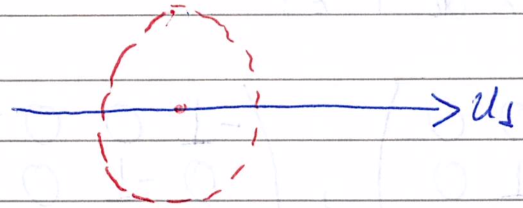


(d)



(e) T corresponde uma rotação θ no sentido anti-horário em relação ao eixo gerado por u_1.





(f) $$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & +\operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Composição!

demonstração do teorema espectral. Sejam E_1 e E_{-1} os autoespaços associados aos autovalores $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$ respectivamente. Defina

$V := E_1 \oplus E_{-1}$ que é (por def.) um subespaço invariante por T

Temos $E = V \oplus V^{\perp}$ e pela prop. da aula passada $V^{\perp}$ é invariante por T.

Assim $T|_{V^{\perp}} : V^{\perp} \to V^{\perp}$ está bem definido, é um operador ortogonal e não possui autovetores!

Podemos afirmar que existe um subespaço $V_1 \subset V^{\perp}$ tal que $\dim V_1 = 2$ invariante por T e obrigatoriamente, pela prop. de hoje no início, existe uma base $\{v_1, w_1\}$ de V_1 tal que

$T v_1 = \cos\theta_1 . v_1 + (-\operatorname{sen}\theta_1) . w_1$
$T w_1 = \operatorname{sen}\theta_1 . v_1 + \cos\theta_1 . w_1$

Mas V_1 é um subespaço invariante por T então

$E = (V \oplus V_1) \oplus \tilde{V}$, no qual $\tilde{V} = (V \oplus V_1)^{\perp}$

Então $T|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \to \tilde{V}$ está bem def, é um op. ortogonal

e não possui autovetores associados! Logo existe $V_2 \subset \tilde{V}$ subespaço de $\dim V_2 = 2$ invariante por T e uma base $\{v_2, w_2\}$ de V_2 tais que

$T v_2 = \cos\theta_2 . v_2 + (-\operatorname{sen}\theta_2) . w_2$
$T w_2 = \operatorname{sen}\theta_2 . v_2 + \cos\theta_2 . w_2$

Assim por diante temos $E = E_1 \oplus E_{-1} \oplus V_1 \oplus \dots \oplus V_R$ seguindo a construção acima e tomando uma base de E no qual:

$$\{ \underbrace{z_1, \dots, z_t}_{\text{base de } E_1}, \underbrace{u_1, \dots, u_s}_{\text{base de } E_{-1}}, \underbrace{v_1, w_1}_{\text{base de } V_1}, \dots, \underbrace{v_R, w_R}_{\text{base de } V_R} \}$$

temos que a matriz de T associada a essa base é a matriz do enunciado.

Decomposição polar de um operador linear

Teorema. Seja $T: E \to E$ um operador linear. Então existe um operador linear não negativo $P: E \to E$ e um operador linear ortogonal $U: E \to E$ tais que $T = P.U$. Além disso, se T é invertível então tal decomposição é única no qual P é a única raiz quadrada positiva do operador positivo TT^* e $U := P^{-1}T$.

dem.: Pelo Teorema dos valores singulares, existem bases ortonormais $\{u_1, \dots, u_n\}$ e $\{v_1, \dots, v_n\}$ de E e nºs positivos $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ no qual posto $(T) = r$ tais que

$$T(u_i) = \sigma_i v_i \quad , \quad 1 \leq i \leq r$$
$$T(u_i) = 0 \quad , \quad r+1 \leq i \leq n$$

Defina $U: E \to E$ e $P: E \to E$ operadores lineares definidos por:

$$\begin{cases} U u_i = v_i & , \quad 1 \leq i \leq r \\ P v_i = \sigma_i v_i & , \quad 1 \leq i \leq r \\ P v_i = 0 & , \quad r+1 \leq i \leq r \end{cases}$$

- U é ortogonal pois leva base ortonormal em base ortonormal
- P é não negativo, pois possui uma base de autovetores associados a autovalores não negativos

Vamos agora verificar que $T = PU$

Temos que

$$
\begin{aligned}
PU(u_i) &= P(Uu_i) \quad , \text{pois } U(u_i) = v_i \\
&= P(v_i) \\
&= \begin{cases} \sigma_i v_i & , 1 \leq i \leq r \\ 0 & , r+1 \leq i \leq n \end{cases} \\
&= T u_i
\end{aligned}
$$

Logo como $PU(u_i) = T(u_i)$ $\forall\, i = 1, .., n$ e $\{u_1, .., u_n\}$ é uma base $\Rightarrow PU = T$.

Segunda parte da demonstração:

Suponhamos T invertível. Como U é ortogonal portanto invertível $\Rightarrow P$ é invertível (pois $PU = T$).
Agora

$$T^* = (PU)^* = U^* P^* = U^* P$$

e assim

$$
\begin{aligned}
TT^* = (PU).(U^*P) &= P(U.U^*)P \qquad (U \text{ ortogonal}) \\
&= P\, I\, P \\
&= P^2
\end{aligned}
$$