O polinômio característico

Definição: Seja $T: E \to E$ um operador linear. Um vetor $v \neq 0$ é chamado autovetor de T se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $Tv = \lambda v$.

Nomenclatura: o escalar λ associado ao autovetor v é chamado autovalor de T e nesse caso v é um autovetor de T associado a λ.

Exemplo 1: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x,y) = (y,x)$

Então $v = (1,1)$ é autovetor de T associado ao autovalor $\lambda = 1$, isto é $T(1,1) = (1,1) = 1.(1,1)$.
De fato, $v = (a,a)$, $a \neq 0$ é uma família de autovetores.

Exemplo 2: Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o op. que corresponde a proj. ortogonal sobre o plano $\pi: x - 2y + z = 0$.

Vimos que $Tv = v$, para todo $v \in$ plano π, isto é todo vetor v do plano π é autovetor associado ao autovalor 1.

Agora $v \in$ plano $\pi^{\perp}$ temos $Tv = 0 = 0 . v$ portanto todo $v \in$ plano $\pi^{\perp}$ é autovetor de T associado ao autovalor $\lambda = 0$.

Pergunta: como encontrar os autovetores e autovalores de uma transf. linear T?

Proposição: $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor do operador linear $T: E \to E \iff \underbrace{\det(T-\lambda I)}_{\text{notação apresentada abaixo.}} = 0$

Aqui $I: E \to E$ operador identidade $I v = v$.

dem.:

$\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor de $T \iff$

$\exists\, v \neq 0$ tal que $Tv = \lambda v \iff$

$\exists\, v \neq 0$ tal que $(T-\lambda I)v = 0$

$\exists\, v \neq 0$ tal que $v \in N(T-\lambda I) \iff$

$(T-\lambda I)$ não é injetivo $\iff$

$(A-\lambda Id)$ matriz associada a transf. (fixada um base) não é invertível

$\iff$

$\underbrace{\det(A-\lambda Id)}_{\det(T-\lambda I)} = 0$

Definição: Dado um op. linear $T: E \to E$ a função $p(\lambda) = \det(T-\lambda I)$ é chamado polinômio característico de T

obs.: $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalor de $T \iff \lambda$ é raiz do polinômio caract. erístico de T.

/ /

Exemplo: Seja $T: E \to E$ transf. linear, $\dim E = 2$.

Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é a matriz de T em relação a uma base fixada então $p(\lambda) = \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$

$= \det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda).(d-\lambda) - cb$

$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$

Exemplo 2: Determine os autovalores de $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$T(x,y) = (4x+3y,\ x+2y).$$

Em relação a base canônica $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ é a matriz associada a T. Logo $p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 5$ é o pol. característico e $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$ são as raízes e portanto os autovalores associado a T.

Vamos continuar o exemplo anterior e encontrar os autovetores associados a $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 5$.

- $\lambda_1 = 1$

$v \neq 0$ autovetor associado a $\lambda_1 = 1$ então

$$(T - \lambda_1 I)v = 0 \iff (A - 1.Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = -y.$

Logo $v = (x, y) \neq (0,0)$ que satisfaz $(T - 1.I)v = 0$

é da forma $x = -y$. $\Rightarrow v = (-y, y) = y.(-1, 1)$.
com $y \neq 0$.

Conclusão: os múltiplos do vetor $(-1, 1)$ são os autovetores associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$.

- $\lambda_2 = 5$

$v \neq 0$ autovetor associado a $\lambda_2 = 5$, então

$(T - \lambda_2 I)v = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda_2 Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = 3y.$

Logo $v = (x, y) \neq (0,0)$ que satisfaz $(T - 5I)v = 0$

É da forma $x = 3y \Rightarrow v = (x, y) = (3y, y) = y.(3,1)$, $y \neq 0$

Conclusão: os múltiplos do vetor $(3,1)$ são os autovetores associado ao autovalor $\lambda_2 = 5$.

Notação: $T: E \to E$, transf. linear.

E_λ: o conjunto dos autovetores associado ao autovalor λ do operador T.

Note que

$$v \in E_\lambda \Leftrightarrow Tv = \lambda v \Leftrightarrow (T - \lambda I)v = 0$$
$$\Leftrightarrow v \in N(T - \lambda I)$$

Logo $E_\lambda = N(T - \lambda I)$

↳ como consequência é um subesp. vetorial.

No exemplo anterior temos

$$\left.\begin{array}{l} E_1 = \langle (-1,1) \rangle \\ E = \langle (3,1) \rangle \end{array}\right\} \text{gerado pelos vetores.}$$

Observe que $v_1 = (-1,1)$ e $v_2 = (3,1)$ são L.I. e portanto determina uma base em $\mathbb{R}^2$. Por curiosidade vamos determinar a matriz $\widetilde{A}$ de T referente a base $\beta = \{v_1, v_2\}$.

$T v_1 = 1 \cdot v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2$
$T v_2 = 5 \cdot v_2 = 0 \cdot v_1 + 5 \cdot v_2$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow \\ Tv_1 & Tv_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Assim $v = \tilde{x} \cdot v_1 + \tilde{y} \cdot v_2 \cong (x, y)$ então

$$T(\tilde{x}, \tilde{y}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = (\tilde{x}, 5\tilde{y}).$$

$\hookrightarrow$ representação mais simples do op. T

Perguntas

- Autovetores associados a autovalores distintos são sempre L.I.?
- Sempre consigo encontrar uma base formada por autovetores?
- Sempre consigo encontrar uma nova representação de um operador T no qual a matriz associada é diagonal?