Teste 1

1. Suponha que $r : [0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ é uma função tal que r'' existe e é continua.

   (a) Se $\| r(t) \| = \sqrt{t}$ mostre que $r(t) \cdot r'(t) = -r(t) \cdot r''(t)$.

   (b) Se $r(t) = (\sqrt{t+1} e^{\sqrt{t}}, e^{\sqrt{t^2+1}})$, calcule $r(t) \wedge r'(t)$.

2. Esboce o gráfico da função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $g(x, y) = x^2 - y^2$.

3. Seja $\alpha : [0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ a função dada por

$$\alpha(t) = (\cos(at), \sin(bt), e^{-t}(t + 10))$$

   sendo a, b números positivos.

   (a) Esboce o conjunto imagem de $\alpha(\cdot)$.

   (b) Estude se $\alpha(\cdot)$ tem derivada e calcule $\alpha'(\cdot)$ e $\alpha''(\cdot)$.

   (c) Achar a reta tangente ao ponto $\alpha(t)$ e calcule $\alpha(t) \cdot \alpha'(t)$.

   (d) Existe $\lim_{t \to \infty} \alpha(t)$?

4. Estude o limite $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 \sin(y^2)}{(x^2 + y^2) y}$

5. Achar α e mostre usando ϵ e δ que $\lim_{(x,y) \to (2,2)} \frac{x^2 y - 1}{y - 1} = \alpha$.