0.0.1 Otimização com restrições

As aplicações anteriores são simplificações de situações reias. Note por exemplo, que nessas aplicações não existem restrições sobre os insumos ou sobre a produção, o que não é uma situação realista. Pelo anterior, no que segue estudaremos um tipo de problema de otimização onde temos que maximizar (minimizar) uma função $f(x_1,\dots,x_n)$ sujeita a diferentes condições sobre as variáveis x_i. Começamos considerando problemas restrições de igualdade.

Otimização com restrições de igualdade

Nesta seção estudaremos um tipo de problemas de otimização que podem ser descritos na forma abstrata:

$$\text{Maximizar } f(x_1,\dots,x_n) \text{ sujeito a condição } h(x_1,\dots,x_n)=c.$$

Para fixar ideais, consideremos inicialmente o caso $n=2$, sendo f,h funções de classe C^1. Suponha que $a=(a_1,a_2)$ é uma solução do problema e que a equação $h(x,y)=c$ pode ser resolvida implicitamente, no seguinte sentido: Existe $\delta>0$ tal que para $x\in(a_1-\delta,a_2+\delta)$, a variavel y pode ser representada em função de x, ou seja, existe uma função $\xi:(a_1-\delta,a_2+\delta)\to\mathbb{R}$ tal que $h(x,\xi(x))=c$ para cada $x\in(a_1-\delta,a_2+\delta)$ e $\xi(a_1)=a_2$.

Nas condiões anteriores, a função $x\mapsto g(x)=f(x,\xi(x))$ possui uma máximo em a_1, o que implica que $g'(a_1)=f_x(a_1,a_2)+f_y(a_1,a_2)\xi'(a_1)=0$. Mais ainda, como $h(x,\xi(x))=c$ para cada $x\in(a_1-\delta,a_2+\delta)$, segue que $\frac{\partial}{\partial x}h(x,\xi(x))=h_x(x,\xi(x))+h_y(x,\xi(x))\xi'(x)=0$ para todo $x\in(a_1-\delta,a_2+\delta)$. Segue do anterior que $(f_x(a_1,a_2),f_y(a_1,a_2))(1,\xi'(a_1))=0$ e $(h_{a_1}(a_1,\xi(a_1)),h_y(a_1,\xi(a_1)))(1,\xi'(a_1))=0$, o que implica que os vetores $(f_x(a_1,a_2),f_y(a_1,a_2))$ e $(h_{a_1}(a_1,\xi(a_1)),h_y(a_1,\xi(a_1)))$ são paralelos. Portanto, existe $\lambda\in\mathbb{R}$ talque

$$(f_x(a_1,a_2),f_y(a_1,a_2))=\lambda(h_x(a_1,\xi(a_1)),h_y(a_1,\xi(a_1))),$$

o que implica que

$$\begin{aligned}
f_x(a_1,a_2)-\lambda h_x(a_1,a_2) &= 0,\\
f_y(a_1,a_2)-\lambda h_y(a_1,a_2) &= 0,\\
h(a_1,a_2)-c &= 0.
\end{aligned}$$

Como consequência das equações anteriores, vemos que (a_1,a_2,λ) é ponto crítico da função $L(x,y,\zeta)=f(x,y)-\zeta(h(x,y)-c)$. A idéia anterior, permite formular e mostrar o seguinte resultado.

Teorema 1. *Suponha que $f,h:U\subset\to\mathbb{R}$ são funções de classe C^1, $x=(x_1,x_2)$ é uma solução do problema: Maximizar $f(x_1,x_2)$ sujeito a condição $h(x_1,x_2)=c$ e que $x=(x_1,x_2)$ não é ponto crítico de $h(\cdot)$. Então existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que (x_1,x_2,λ) é um ponto crítico da função $L(x,y,\zeta)=f(x,y)-\zeta(h(x,y)-c)$.*

Definição 2. *A função L é chamada função Lagrangiana associada a f e h, e o valor η é chamado multiplicador de Lagrange.*

Observação 3. Nas observações iniciais, supomos a existência de $\delta>0$ e de uma função $\xi:(a_1-\delta,a_2+\delta)\to\mathbb{R}$ tal que $h(x,\xi(x))=c$ para cada $x\in(a_1-\delta,a_2+\delta)$ e $\xi(a_1)=a_2$. Notamos que no Teorema 1, o anterior é consequência da condição $\nabla h(x,y)\neq 0$.

Exemplo 4. Maximizar a função $f(x,y)=xy$ sujeita a condição $h(x,y)=ax+by=c$ com $ab\neq 0$.

Para começar, temos que mostrar que o problema tem pelo menos uma solução. Se (α,β) é solução do problema, então $f(\alpha,\beta)>0$, de modo que α,β são ambos positivos ou ambos negativos. Além disso, é simples ver que a equação $h(x,y) = ax+by = c$ não possui soluções com ambas co-ordenadas negativas. Do anterior, vemos que o problema é equivalente a achar um máximo de f no conjunto

$$E = \{(x,y) : ax+by = c,\, x \geq 0, y \geq 0\} = \{(x,y) : ax+by = c,\, x \in [0, \frac{c}{a}], y \in [0, \frac{c}{b}]\}.$$

Como E é compact segue que f tem pelo menos um máximo em E, de modo que o problema tem pelo menos uma solução.

Usemos agora o Teorema. O gradiente de h é dado por $\nabla(x,y) = (a,b) \neq 0$, de modo que h não possui pontos críticos. A função Lagrangiano é dada por $L(x,y) = xy - \mu(ax+by-c)$ e os pontos críticos de L verificam as equações

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\mu) &= y - \mu a = 0\\
\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\mu) &= x - \mu b = 0\\
\frac{\partial L}{\partial \mu}(x,y,\mu) &= ax + by - c = 0
\end{aligned}$$

de onde obtemos que $\mu = \frac{c}{2ab}, x = \frac{c}{2a}$, $y = \frac{c}{2b}$ e que $(\frac{c}{2ab}, \frac{c}{2a}, \frac{c}{2b})$ é o único ponto crítico de L. Como o problema tem pelo menos uma solução e L possui somente um ponto crítico, segue que $(\frac{c}{2ab}, \frac{c}{2a})$ é a solução do problema.

Exemplo 5. Maximizar a função $f(x,y) = x^2y$ sujeita a condição $h(x,y) = ax^2+by^2 = c > 0$ com $ab \neq 0$.

Para facilitar, no que segue somente procuraremos uma solução com $x > 0$ e $y > 0$. O gradiente de $h(\cdot)$ é dado por $\nabla(x,y) = (2ax, 2by)$, de modo que o único ponto crítico de h é $(0,0)$ (que não é solução do problema). A função Lagrangiano é dada por $L(x,y) = x^2y - \mu(ax^2+by^2-c)$ e os pontos críticos de L são tais que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\mu) &= 2x(y - \mu a) = 0\\
\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\mu) &= x^2 - 2\mu by = 0\\
\frac{\partial L}{\partial \mu}(x,y,\mu) &= ax^2 + by^2 - c.
\end{aligned}$$

Como estamos interessados somente em soluções com $x \neq 0$ e $y \neq 0$, da primeira equação segue que $y = \mu a$ e da segunda que $x = \mu\sqrt{2ba}$. Usando agora a tercera equação obtemos que $\mu = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{c}{3b}}$. Assim, o "candidato"a solução do problema é $(\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2}{3}ac}, \sqrt{\frac{c}{3b}})$.

A análise dos outros casos é deixado como exercício.

Exemplo 6. Maximizar a função $f(x,y) = xy$ sujeita a condição $h(x,y) = x^2+y^2 = 1$. Como $\nabla h(x,y) = (2x, 2y)$, vemos que o único ponto crítico é $(0,0)$, de modo que podemos usar o Teorema. A Lagrangiano é dada por $L(x,y) = xy - \mu(x^2+y^2-1)$ e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\mu) &= y - 2\mu x = 0,\\
\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\mu) &= x - 2\mu y = 0,\\
\frac{\partial L}{\partial \mu}(x,y,\mu) &= x^2 + y^2 - c = 0.
\end{aligned}$$

Das duas primeiras equações segue que $y = 2\mu x$, $x = 2\theta y$, de onde obtemos que $x = 4\theta^2 x$ e $\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, pois a possibiliadade $x = 0$ pode ser descartada (porque ?). Do anterior, $x = \pm y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Analisando os diferentes casos, podemos determinar os pontos de máximo e mínimo. A análise dos outros casos é deixado como exercício.

O caso n-dimensional com várias restrições de igualdade.

Nesta seção estudamos problemas da forma

(P) Maximizar $f(x_1,\ldots,x_n)$ sujeito as restrições de igualdade

$$h_1(x_1,\ldots,x_n)=c_1,\ldots,h_m(x_1,\ldots,x_n)=c_m,\qquad m,n\in\mathbb{N}.$$

Antes de enunciar o próximo resultado, lembremos do conceito posto de uma matriz.

Definição 7. *Seja A uma matriz de m filas e n colunas ($A\in M_{m,n}$). O posto fila (coluna) de A é o maior número de filas (colunas) linearmente independentes. Pode-se mostrar que o posto fila de A é o posto coluna de A são iguais.*

Definição 8. *Dizemos que o posto de A é completo se $P(A)=\min\{m,n\}$.*

Se escrevemos a matriz A na forma $A=(A_1,A_2,\ldots,A_n)$ onde $A_i\in\mathbb{R}^m$ representa a i-sima coluna de A, vemos que o posto coluna de A é a dimensão do espaço gerado pelas colunas A_j, ou seja, a dimensão do espaço $\{\sum_{i=1}^n x_iA_i : x_i\in\mathbb{R},\ i=1,\ldots,n\}$.

O estudo de valores extremos para este tipo de problemas é feito de maneira similar ao caso de duas variáveis. Como antes, o seguinte critério é provado usando o teorema da função implicita.

Teorema 9. *Suponha que $f(\cdot),h_i(\cdot)$, $i=1,\ldots,N$ são funções de classe C_1, que $a=(a_1,\ldots,a_n)$ é uma solução do problema* **(P)** *e que o posto da matriz $(\frac{\partial h_i(a)}{\partial x_j})_{i,j}$ é maior ou igual a m (o número de restrições de igualdade). Então existe $(\mu_1,\ldots,\mu_m)\in\mathbb{R}^m$ tal que $(a,\mu_1,\ldots,\mu_m)$ é um ponto crítico da função Lagrangiana*

$$L(x,\mu_1,\ldots,\mu_m)=f(x)-\sum_{i=1}^m \mu_i[h_i(x)-c_i].$$

Observação 10. Pelo resultado anterior, podemos procurar as soluções do problema **(P)** estudando os pontos críticos da função Lagrangiano.

Exemplo 11. **(P)**Maximizar a função $f(x,y)=xyz$ sujeita a condições $h_1(x,y,z)=x^2+y^2=1, h_1(x,y,z)=x+z=1$.

Para começar, notamos que $(\frac{\partial h_i(a)}{\partial x_j})i,j=\begin{pmatrix}2x & 2y & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ de onde vemos que o posto é 2 para todo $(x,y)\neq 0$. Portanto, a condição do Teorema que diz sobre o posto da matriz é satisfeita. Estudemos agora os pontos críticos da função Lagrangiana que é dada por $L(x,y)=xyz-\mu_1(x^2+y^2-1)-\mu_2(x+z-1)$. Os pontos críticos são soluções das equações

$$\frac{\partial L}{\partial x}=yz-2\mu_1x-\mu_2=0,\qquad \frac{\partial L}{\partial y}=xz-2\mu_1y=0,\qquad \frac{\partial L}{\partial z}=xy-\mu_2=0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \mu_1}=1-x^2-y^2,\qquad \frac{\partial L}{\partial \mu_2}=1-x-z=0.$$

Das equações anteriores vemos que $\frac{xz}{y}=2\mu_1$ e $xy=\mu_2$, de onde segue que

$$\begin{aligned}
&yz-2\mu_1x-\mu_2=yz-\frac{xz}{y}x-xy=0\Rightarrow y^2z-x^2z-xy^2=0\\
&\Rightarrow(1-x^2)(1-x)-x^2(1-x)-x(1-x^2)=0\\
&\Rightarrow(1-x)\big((1-x^2)-x^2-x(1+x)\big)=0\\
&\Rightarrow(1-x)\big(1-3x^2-x\big)=0.
\end{aligned}$$

As raizes do polinomio ácima são $x=1$ e $x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{6}$. Usando a restrições de igualdade e avalido em $f(\cdot)$ podemos achar o ponto de máximo.

Exemplo 12. **(P)**Maximizar a função $f(x,y) = x^2yz$ sujeita a condições $h_1(x,y,z) = x^2+y^2 = 1, h_1(x,y,z) = x+z = 1$.

Do exercicio anterior sabemos que $(\frac{\partial h_i(a)}{\partial x_j})i,j = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ tem posto 2 e que o Teorema 16 pode ser usado. A Lagrangiana é dada por $L(x,y) = xyz - \mu_1(x^2+y^2-1) - \mu_2(x+z-1)$, de onde obtemos que

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2xyz - 2\mu_1 x - \mu_2 = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = x^2z - 2\mu_1 y = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = x^2y - \mu_2 = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \mu_1} = 1 - x^2 - y^2, \quad \frac{\partial L}{\partial \mu_2} = 1 - x - z = 0.$$

Do anterior segue que

$$\begin{aligned} & 2xyz - 2\mu_1 x - \mu_2 = 2xyz - \frac{x^2z}{y}x - x^2y = 0 \Rightarrow 2xy^2z - x^3z - x^2y^2 = 0 \\ & \Rightarrow x(2(1-x^2)(1-x) - x^2(1-x) - x^2(1-x^2) = 0 \\ & \Rightarrow x(1-x)(2(1-x^2) - x^2 - x^2(1+x)) = 0 \\ & \Rightarrow (1-x)\left(1 - 3x^2 - x\right) = 0. \end{aligned}$$

Exemplo 13. Estudar o problema **(P)** Maximizar a função $f(x,y) = x^2y^2z^2$ sujeita a condições $h_1(x,y,z) = x^2+y^2 = 1, h_1(x,y,z) = x+z = 1$.

Exemplo 14. Estudar o problema **(P)** Maximizar a função $f(x,y) = xyz$ sujeita a condições $h_1(x,y,z) = x^2+y^2 = 1, h_1(x,y,z) = x^2+z = 1$.

0.0.2 Exercícios

1. Mostrar que o ponto achado no exemplo 6 é realmente solução do problema de otimização.
2. Achar a distância mínima e máxima da origem à elipse $x^2+xy+y^2 = 3$. Estude o mesmo problema anterior, mas para a elipse $ax^2+by^2 = c^2$, sendo a,b,c positivos.
3. Suponha que um produtor tem uma função utilidade da forma $f(x,y) = kx^ay^{1-a}(a > 0)$ com orçamento $p_1x + p_2y = c > 0$ sendo $p_i \geq 0$. Estudar quando a utilidade é máxima.
4. Estudar os pontos de máximo e mínimo da função $f(x,y,z) = x+y+z^2$ que sejam soluções das equações $x^2+y^2+z^2 = 1$ e $y = 0$.
5. Maximizar a função $f(x,y,x) = x^2y^2z^2$ sujeita a condição $x^2+y^2+z^2 = c^2$.

Otimização com restrições de desigualdade

Estudamos agora uma classe de problemas de otimização da forma

(P) Maximizar (minimizar) a função $f(x_1,\ldots,x_n)$ sujeita as condições $h_1(x_1,\ldots,x_n) \leq c_1,\ldots,h_m(x_1,\ldots,x_n) \leq c_m$ sendo $m,n \in \mathbb{N}$.

Para estudar este problema dispomos do seguinte resultado.

Teorema 15. *Suponha que as funções $f(\cdot), h_i(\cdot)$ são de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ e que $a = (a_1,a_2)$ é uma solução do problema*

***(P)** Maximizar $f(x,y)$ sujeita as condição $h(x,y) \leq b$.*

Seja $L(\cdot)$ é a função Lagrangiana dada por $L(x,y,\mu) = f(x,y) - \mu[h(x,y) - c]$.

Se $h(a) = b$ e alguma das parciais $\frac{\partial h(a)}{\partial x}$, $\frac{\partial h(a)}{\partial y}$ é diferente de zero, ou $h(a) < b$, então existe $\lambda^* \geq 0$ tal que

$$\frac{\partial L}{\partial x}(a,\lambda^*) = 0, \frac{\partial L}{\partial y}(a,\lambda) = 0, \ \lambda^*[h(a) - b] = 0, \quad h(a) \leq b.$$

De maneira similar ao caso de otimização com restrições de igualdade, temos um resultado que nos permite estudar o caso com várias restrições de desigualdade.

Considere o problema

(P) Maximizar a função $f(x_1, \ldots, x_n)$ sujeita as condições

$$h_1(x_1, \ldots, x_n) \leq b_1, \ldots, h_m(x_1, \ldots, x_n) \leq b_m,$$

sendo $m, n \in \mathbb{N}$ números fixos.

Teorema 16. *Suponha que as funções $f(\cdot), h_1(\cdot), \ldots, h_m(\cdot)$ são de classe C^1 e definidas de um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ com valores em $\mathbb{R}$, $b_1, \ldots, b_m$ são números reais, $a = (a_1, \ldots, a_n)$ é uma solução do problema **(P)** tal que $h_i(a) = b_i$ para todo $1 \leq i \leq k_0$ e $h_i(a) < b_i$ para $i \in \{k_0 + 1, \ldots, m\}$. Seja $L(\cdot)$ a função Lagrangiana dada por $L(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [h_i(x) - b_i]$ e suponha que a matriz*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1(a)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1(a)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial h_{k_0}(a)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_{k_0}(a)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{17}$$

tem posto k_0. Então existem multiplicadores de Lagrange não negativos $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ tais que

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(a, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = 0, \quad \lambda_i [h_i(a) - b_i] = 0 \quad e \quad h_i(a) \leq b_i, \ \forall i = 1, \ldots, m. \tag{18}$$

Observação 19. *Como antes, o Teorema anterior diz que podemos procurar os pontos que maximiza o problema resolvendo as equações e desigualdades em (18).*

Observação 20. *No que segue, diremos que a i-ésima restrição é ativa em a se $h_i(a) = b_i$. De modo contrário, diremos que a condição i é inátiva.*

Exemplo 21. Maximizar a função $f(x, y, z) = xyz$ sujeita as restrições $h_1(x, y, z) = x + y + z \leq 1, g_2(x, y, z) = x \geq 0, g_3(x, y, z) = y \geq 0 \quad e \quad g_4(x, y, z) = z \geq 0$.

Obviamente, o problema pode ser re-escrito na forma: Maximizar a função $f(x, y, z) = xyz$, sujeita as restrições $h_1(x, y, z) = x + y + z \leq 1, h_2(x, y, z) = -x \leq 0, h_3(x, y, z) = -y \leq 0 e h_4(x, y, z) = -z \leq 0$.

Para usar o Teorema 21 temos que analizar a matriz definida em (30). Note que para $x \in \mathbb{R}^3$ a matriz é dada por

$$(\frac{\partial h_i(x)}{\partial x_j})_{4,3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

que tem posto 3, pois os três vetores colunas da matriz são L.I. Por otro lado, se $a = (a_1, \ldots, a_n)$ é uma solução do problema de otimização, então no máxino três das restrições podem ser ativas, de onde segue que condição do Teorema 16 relativa a matriz (30) é satisfeita.

Note agora que a função Lagrangiana é dada por

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = xyz - \lambda_1(x + y + z - 1) + \lambda_2 x + \lambda_3 y + \lambda_4 z.$$

Quando estudamos as condições em (31) obtemos

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial x} = yz - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 & \frac{\partial L}{\partial y} = xz - \lambda_1 + \lambda_3 = 0 & \frac{\partial L}{\partial z} = xy - \lambda_1 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1(x + y + z - 1) = 0 & \lambda_2 x = 0 & \lambda_3 y = 0 \\ \lambda_4 z = 0 & x + y + z \leq 1 & x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \end{pmatrix}$$

Como $f(x, y, z) = 0$ quando alguma das variáveis é zero, somente procuraremos por soluções com $x > 0, y > 0,\ z > 0$. As primeiras três restrições podem ser escritas na forma

$$\lambda_1 = yz + \lambda_2 = xz + \lambda_3 = xy + \lambda_4. \tag{23}$$

Consideremos separadamente os casos $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_1 > 0$. Se $\lambda_1 = 0$, então segue que $\lambda_i = 0$ para todo i e que pelo menos uma das variáveis x, y, z tem que ser nula. Neste caso a função a ser maximizada será zero. Ou seja, o máximo que estamos procurando não pode ser obtido com $\lambda_1 = 0$.

Suponha agora que $\lambda_1 > 0$. Neste caso, da quarta equação teremos que $x + y + z = 1$ de modo que pelo menos uma das variáveis x, y ou z é não nula. Se $x = 0$, de (4)obtemos $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_1 > 0$, de onde segue (veja equações 6 e 7) que $y = z = 0$. Novamente, neste caso teríamos $f(x, y, z) = 0$. Assim, no que segue podemos assumir que $x > 0$.

Se $x > 0$, da equação 5 obtemos que $\lambda_2 = 0$ e usando a equação 1 segue que $y > 0$ e que $z > 0$. Assim, por 6 e 7 obtemos que $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Isto permite re-escrever a equação (4) da forma $yz = xz = xy$ de onde segue que $x = y = z$. Assim, o ponto candidato a ser ponto de máximo é $x = y = z\frac{1}{3}$ com $\lambda_1 = \frac{1}{9}$ (use 3).

Exemplo 24. Maximizar a função $f(x, y, z) = x^2yz$ sujeita as restrições $h_1(x, y, z) = x + y + z \leq 1$, $g_2(x, y, z) = x \geq 0$, $g_3(x, y, z) = y \geq 0$ e $g_4(x, y, z) = z \geq 0$.

procedendo como no exercicio anterior, temos que analizar a matriz (30). Com antes, a matriz tem posto 3, de modo que para aplicar o Teorema 16, no máximo três das retrições podem ser ativas. Como o problema dever tem uma solução com maximo positivo, podemos supor que $x \neq 0$, $y \neq 0$ e que $z \neq 0$ e aplicaro o Teorema sem problemas.

A partir da Lagrangiana

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = x^2yz - \lambda_1(x + y + z - 1) + \lambda_2 x + \lambda_3 y + \lambda_4 z,$$

obtemos Quando estudamos as condições em (31) obtemos

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial x} = 2xyz - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 & \frac{\partial L}{\partial y} = x^2z - \lambda_1 + \lambda_3 = 0 & \frac{\partial L}{\partial z} = x^2y - \lambda_1 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1(x + y + z - 1) = 0 & \lambda_2 x = 0 & \lambda_3 y = 0 \\ \lambda_4 z = 0 & x + y + z \leq 1 & x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \end{pmatrix}.$$

Como estamos supondo $x \neq 0$, $y \neq 0$ e que $z \neq 0$ segue que $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ e que

$$\lambda_1 = 2xyz = x^2z = x^2y \Rightarrow z = y \ \wedge \ 2y = x. \tag{25}$$

Para finalizar temos que usar a condição $\lambda_1(x + y + z - 1) = 0$. Se $x + y + z = 0$ obtemos que $2y + y + y = 1$ de onde segue que $y = z = \frac{1}{4}$ e $x = \frac{1}{2}$. Se $\lambda 1 = 0$, o problema pode ser analisado estudando a função $h(x) = 2y^3$ para h definida em $[0, 1]$ e é facil ver que $h(\cdot)$ em maximo em $y = 1$. Do anterior, segue que a solução do probema é dada por $y = z = \frac{1}{4}$ e $x = \frac{1}{2}$.

Exemplo 26. Maximizar a função $f(x, y, z) = xyz$ sujeita as restrições $h_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $g_2(x, y, z) = x \geq 0$, $g_3(x, y, z) = y \geq 0$ e $g_4(x, y, z) = z \geq 0$.

Neste caso, para aplicar o Teorema 16 temos estudar a matriz

$$(\frac{\partial h_i(x)}{\partial x_j})_{4,3} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Como a solução do problema dever co-ordenadas não zero e o posto da matris é três, vemos que o Teorema pode aplicado. A Lagrangiana é dada por

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = xyz - \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \lambda_2 x + \lambda_3 y + \lambda_4 z,$$

de onde obtemos

$$\left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial L}{\partial x} = yz - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 & \frac{\partial L}{\partial y} = xz - \lambda_1 + \lambda_3 = 0 & \frac{\partial L}{\partial z} = xy - \lambda_1 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1(x+y+z-1) = 0 & \lambda_2 x = 0 & \lambda_3 y = 0 \\ \lambda_4 z = 0 & x+y+z \leq 1 & x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \end{array}\right)$$

Mais ainda, como $x \neq 0$, $y \neq 0$ e que $z \neq 0$ segue que $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ e que

$$yz = 2\lambda_1 x, \;\; xz = 2\lambda_1 y \;\; xy = 2\lambda_1 z \Rightarrow \frac{yz}{x} = \frac{xz}{y} = \frac{xy}{z} \Rightarrow x^2 = y^2 = z^2, \tag{28}$$

Para continuar devemos usar a condição $\lambda_1(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0$. Se $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, seque que $3x^2 = 1$ e que $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Se $x^2 + y^2 + z^2 < 1$, segue que $\lambda_1 = 0$ de onde segue que $yz = xy = zx = 0$ caso que não é de interesse. Assim as soluções do problema podem ser achadas via relação $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Exemplo 29. Maximizar $f(x,y,z) = x^2y^2z$ sujeita as restrições $h_1(x,y,z) = x+y+z \leq 1$, $g_2(x,y,z) = x \geq 0$, $g_3(x,y,z) = y \geq 0$ e $z \leq 1$.

Neste caso, para aplicar o Teorema 16 temos que estudar todas as sub-matrizes de

$$(\frac{\partial h_i(x)}{\partial x_j})_{4,3} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

A solução do problema dever ter as três coordenadas não zero e como o posto da matriz anterior é três, vemos que qualquer caso onde algumas das restrições seja ativa pode ser estudado usando o Teorema. Note que o caso onde nenhuma restrição é ativa, tambem é estudado pelo Teorema.

Neste exemplo a Lagrangiana é dada por

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) = x^2y^2z - \lambda_1(x+y+z-1) + \lambda_2 x + \lambda_3 y + \lambda_4(z-1).$$

Usando o teorema obtemos que

$$\left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial L}{\partial x} = 2xy^2z - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 & \frac{\partial L}{\partial y} = 2x^2yz - \lambda_1 + \lambda_3 = 0 & \frac{\partial L}{\partial z} = x^2y^2 + \lambda_1 - \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1(x+y+z-1) = 0 & \lambda_2 x = 0 & \lambda_3 y = 0 \\ \lambda_4(z-1) = 0, & & \end{array}\right)$$

Como podemos supor que $x \neq 0$ e $y \neq 0$, obtemos que $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, de onde segue que

$$2xy^2z = \lambda_1, \;\; 2x^2yz = \lambda_1, \;\; x^2y^2 = \lambda_1 - \lambda_4 = 0 \tag{31}$$

Consideremos agora os casos $\lambda_4 = 0$ e $\lambda_4 \neq 0$. Se $\lambda_4 \neq 0$ temos que $z = 1$ e

$$2xy^2 = 2x^2y, \;\; x^2y^2 = \lambda_1 - \lambda_4 = 0, \;\; \Rightarrow x = y. \tag{32}$$

Se $\lambda_4 \neq 0$ e $\lambda_1 \neq 0$, então $x+y+z-1 = 0$ e $x = 0$, $y = 0$, que é um caso que podemos descartar. Se $\lambda_4 \neq 0$ e $\lambda_1 = 0$, segue que $2x^2yz = \lambda_1 = 0$ e que $x = 0$ ou $y = 0$. Assim, esta opção tambem pode ser descartada.

Do anterior vemos que o ponto de máximo dever ser procurado supondo $\lambda_4 = 0$. Se $\lambda_4 = 0$, das igualdades iniciais temos que

$$\lambda_1 = 2xy^2z = 2x^2yz = x^2y^2 \Rightarrow x = y = 2z.$$

Se $\lambda_4 = 0$ e $\lambda_1 \neq 0$, então

$$x+y+z = 1 \rightarrow z = \frac{1}{5} \Rightarrow x = y = \frac{2}{5}.$$

e $(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5})$ é candidato a máximo.

Se $\lambda_4 = 0$ e $\lambda_1 = 0$, então

$$0 = 2xy^2z = 2x^2yz = x^2y^2 \Rightarrow x = 0 \ \vee \ y = 0 \ \vee \ z = 0, \tag{33}$$

que é um caso que podemos descartar. Do anterior podemos concluir que $(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5})$ é a solução do problema.

Exemplo 34. Maximização de utilidade *Representemos por x_i a quantidade de uma mercadoria i e por $f(x_1, \ldots, x_n)$ o nível de utilidade ou satisfação com o consumo de x_i unidades do produto i. Denotemos por p_i os valores da mercadoria i e por I a renda individual disponível. Neste caso, desejamos maximizar a função $f(.)$ (a utilidade ou bem estar do consumo) sujeito a restrição orcamentária $\sum_{i-1}^{n} p_i x_i \leq I \quad x_i \geq 0, \forall i$. Para estudar este problema via a teoria anterior, assumiremos que $\frac{\partial p(x)}{\partial x_j} > 0$ para todo x e cada j. Isto não é uma grande restrição, mais ainda é uma restrição natural. A positividade das derivadas diz que a satisfação ou a utilidade do cresce com o consumo. Além do anterior, supomos que a condiçãa do Teorema 21 sobre a matriz (30) é satisfeita para todo x.*

A função Lagrangiana é dada por

$$L(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) = f(x) - \lambda[\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - I] + \sum_{j=2}^{n} \lambda_j x_j.$$

Note que das equações

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(x, \lambda) = \frac{\partial p}{\partial x_i}(x) - \lambda p_i = 0,$$

e da hipotese $\frac{\partial p(x)}{\partial x_j} > 0$ para todo x e cada j, obtemos que o multiplicador de Lagrange não pode ser zero. Assim, teremos $\lambda > 0$ e como consequência de (1) teremos que o problema pode ser tratado como um problema de maximização com restrição de igualdade. O anterior não é surprendente, pois podemos esperar que a maior utilidade ou bem estar do consumo seja obtida usando todo o capital.

0.0.3 Exercícios

1. Maximizar a função $f(x, y, x) = x^2 + y^2$ sujeita as condições $2x + y \leq 2, x \geq 0, y \geq 0$.
2. Maximizar a função $f(x, y, x) = 2y^2 - x$ sujeita as condições $x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$.

Problemas de optimização com várias restrições de desigualdade é igualdade

Fromulamos este tipo de problemas na forma

(P) Maximizar a função $f(x_1, ..., x_n)$ sujeita as condições

$$\begin{aligned} g_1(x_1, \ldots, x_n) \leq b_1, \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n) &\leq b_k, \\ h_1(x_1, \ldots, x_n) = c_1, \ldots, h_m(x_1, \ldots, x_n) &= c_m, \end{aligned}$$

sendo $m, k \in \mathbb{N}$ e b_i, c_j números reais fixos.

Para este caso, o seguinte resultado de maximização é válido.

Teorema 35. *Suponha que $f, h_1, \ldots, h_m,, g_1, \ldots, g_k$ são funções de classe C^1 definidas de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$, $b_1, \ldots, b_m$, $c_1, \ldots, c_k$ são números reais e que "a" é um ponto de máximo local de $f(\cdot)$ tal que $g_i(a) = b_i$ para todo $0 \leq i \leq k_0 \leq k$ e $g_i(a) < b_i$ para $i \in \{k_0 + 1, \ldots, m\}$.*

Seja $L(\cdot)$ a função Lagrangiana dada por

$$L(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \ldots, \mu_k) = f(x) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i [g_i(x) - b_i] - \sum_{i=1}^{m} \mu_i [h_i(x) - c_i]$$

e suponha que a matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(a)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1(a)}{x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_{k_0}(a)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_{k_0}(a)}{\partial x_n} \\ \\ \frac{\partial h_1(a)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1(a)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial h_m(a)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_m(a)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{36}$$

tem posto posto maximo $k_0 + m$ (note que $k_0 + m \leq n$). Então existem números reais não negativos $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ e números reais $\mu_1, \dots, \mu_m$ tais que

$$\frac{\partial L}{\partial x_p}(a, \lambda, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_k) = 0, \lambda_i[g_i(a) - b_i] = 0, h_j(a) = c_j \quad e \quad g_s(a) \leq c_s, \tag{37}$$

para cada $p = 1, \dots, n, i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, m$ e todo $s = 1, \dots, k$.

Exemplo 38. Maximizar a função $f(x, y) = x - y^2$ sujeita as restrições $x^2 + y^2 = 4$, $x \geq 0$,$y \geq 0$.

Estudemos a matriz definida em (36). Note que se as duas restrições de desigualdade são ativas, então a restrição de igualdade não é verificada. Assim, pelo menos umas das restrições de desigualdade deve ser não ativa. Se uma das restrições de desigualdade é ativa teremos uma das seguintes matrizes

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2x & 2y \end{pmatrix} \qquad ou \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix},$$

ambas com posto 2. Portanto, se existe uma solução não nula do problema de maximização, a matriz associada a esta solução verificará a condições do teorema.

Seja $L(x, y, \mu, \lambda_1, \lambda_2) = x - y^2 - \mu[x^2 + y^2 - 4] + \lambda_1 x + \lambda_2 y$ Lagrangiana associada ao problema. Neste caso, das equações no Teorema 35 temos que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial x} = 1 - 2\mu x + \lambda_1 = 0 & \frac{\partial L}{\partial y} = -2y - 2\mu y + \lambda_2 = 0 & x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ \lambda_1 x = 0 & \lambda_2 y = 0 & \end{pmatrix}$$

Da primeira condição segue que $1 + \lambda_1 = 2\mu x$, de modo que $\mu > 0$ e $x > 0$, pois $\lambda_1 \geq 0$.

Se $y \neq 0$, temos que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ de onde obtemos que

$$1 = 2\mu x, \;\; -2y = 2\mu y \;\Rightarrow \mu = -1 \;\wedge\; x = -1,$$

de onde segue que a solução dever ser procurada com $x \neq 0$ e $y = 0$. Desta ultima afirmação segue que a solução do problema é $(2, 0)$.