Lista 2

1. Guidorizzi: Página 183, exercicios: 1f,1h e 1m, 2,3,4,5,10,12,14,21,31.
2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq 0, \\ 0 & (x,y) = 0. \end{cases}$$
Estude a existência de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.
3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq 0, \\ 0 & (x,y) = 0. \end{cases}$$
Estude a existência de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.
4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^4}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq 0, \\ 0 & (x,y) = 0. \end{cases}$$
Estude a existência de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.
5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq 0, \\ 0 & (x,y) = 0. \end{cases}$$
Estude a existência de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.
6. Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sum_{i=1}^m \sin(x_i)$, onde $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Achar $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$.
7. Sejam $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{\sin(xy^2)}{x^2+y^2+z^2}, & (x,y,z) \neq 0, \\ 0 & \text{em outro caso.} \end{cases}$$
   (a) Achar $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(0,0,0)$.
8. Suponha que $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$ e seja $H : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ a função definida por $H(x,y) = f(x)g(y)$. A função $H(\cdot)$ é diferenciavel em (x,y). ?
9. Mostre que uma função $H : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ é diferenciavel em $(a,b) \in R^2 \Leftrightarrow$ existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e uma função $\zeta : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ tal que
$$f(a+h, b+k) - f(a,b) - \alpha h - \beta k = \zeta(h,k),$$
$\lim_{(h,k)\to 0} \zeta(h,k) = 0$ e $\lim_{(h,k)\to 0} \frac{\zeta(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$.

10. Suponha que $\psi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ é uma função diferenciavel em $\mathbb{R}$ e definamos $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ por $F(x, y) = (x^2 + y^2)\psi(\frac{x}{y})$. Mostre que $x\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2F(x, y)$.

11. Seja $F : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ dada por $F(x, y, z) = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}$. Mostre que

$$x\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) + y\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) + z\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = -F(x, y, z).$$

12. Calcular as derivadas parciais, nos pontos que existem, de

    (a) $f(x, y, z) = xe^{x-y-z}$,

    (b) $f(x, y, z) = x^2 \arcsin(\frac{y}{z})$,

    (c) $f(x, y, z) = \frac{xyz}{x+y+z}$.

13. Achar $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 1, 1)$ sabendo que a equação $xy + z^3x - 2yz = 0$ permite definir z em função de x, y.

14. Seja $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R}$ dada por $F(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$. Achar $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y)$.

15. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq 0, \\ 0 & (x, y) = 0. \end{cases}$$

    (a) A função é contínua em $(0, 0)$?

    (b) As parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existem ? .

    (c) f é diferenciável em $(0, 0)$?

16. Suponha que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função e que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ existem em todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Se (a, b) é um ponto de máximo de f (ou seja, $f(a, b) \geq f(x, y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$), que pode dizer de $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$?