Lista 1

1. Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ aberto e $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^{n+1}. Usando o Teorema de Taylor para funções de variavel real, prove que para cada $v = (v_1, v_2)$ próximo de zero, existe $\theta_v \in (0,1)$ (que depende de v) tal que

$$
\begin{aligned}
f(a+v) &= f(a) + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) v_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(a) v_i v_j + \cdots \\
&\quad + \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\partial^n f}{\partial^{n-k} x_i \partial^k x_j}(a) v_i^{n-k} v_j^k \\
&\quad + \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial^{n+1-k} x_i \partial^k x_j}(a + \theta_v v) v_i^{n+1-k} v_j^k.
\end{aligned}
$$

(Obs: tem que deduzir as fórmulas em azul.)

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o polinómio dado por $f(x,y) = \sum_{j=0}^{4} b_j x^{4-j} y^j$. Achar a representação de Taylor de grau 5 com $a = (0,0)$ e $v = (v_1, v_2) = (x, y)$.

3. Suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um polinómio da forma $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$. Represente f na forma $f(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j (x-a)^j$. Quais são os valores dos coeficientes b_j ?

4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o polinómio dado por $f(x,y) = \sum_{j=0}^{4} b_j x^{4-j} y^j$. Represente $f(\cdot)$ na forma $f(x,y) = \sum_{i,j} c_{i,j} (x-a_1)^j (y-a_2)^i$ sendo $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$.

5. Achar o polinómio de Taylor de grau k para $f(x,y) = (x+y)^n$. (Estude os casos de $k < n$, $k = n$ and $k > n$.)

6. Achar o polinómio de Taylor de grau 3 para $f(x,y) = \sin(x+y)$ e $g(x,y) = \sin(x^2+y^2)$.

7. Suponha que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é de classe C^4 e seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada $g(x,y) = f(x^2+y^2)$. Achar o polinómio de grau 4 de $g(\cdot)$.

8. Suponha que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é de classe C^4 e seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada $g(x,y) = f(x^n + y^n)$ sendo $n \in \mathbb{N}$. Achar o polinómio de grau 4 de $g(\cdot)$.

9. Suponha que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é de classe C^{n+1} e seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada $g(x,y) = f(x^n + y^n)$ sendo $n \in \mathbb{N}$. Tente achar uma formula para polinómio de Taylor de grau k de $g(\cdot)$. (O estudo deste exercicio, pode valer até um ponto de prova).

10. Suponha que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é da forma $f(x,y) = g_1(x) g_2(y)$ onde $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções de classe C^∞. Se $a = (a_1, a_2)$ e existe $M > 0$ tal que $| g_i^{(n)}(s) | \leq M$ para $i = 1, 2$ e todo $n \in \mathbb{N}$, então

$$
f(x,y) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} g_1^{(j)}(a_1) \frac{(x-a_1)^j}{j!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} g_2^{(j)}(a_2) \frac{(y-a_2)^j}{j!}\right) \ ?
$$

11. Seja $f(\cdot)$ a função do exercio anterior e P_f a serie de Taylor de f dada por $(P_f)(x,y) = \sum_{p \geq 0} \frac{1}{p!} f^{(p)}(a) v^p$ sendo $v = (x - a_1, y - a_2)$. Estude se

$$
(P_f)(x,y) = \sum_{p \geq 0} \frac{1}{p!} f^{(p)}(a) v^p = \left(\sum_{j=0}^{\infty} g_1^{(j)}(a_1) \frac{(x-a_1)^j}{j!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} g_2^{(j)}(a_2) \frac{(y-a_2)^j}{j!}\right).
$$

12. Suponha que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^4 e seja $H_f(x, y)$ a matriz dada por

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$$

Se $v = (v_1, v_2)$ então $vH_f(x, y)v^T = f^{(2)}(x, y) \cdot v^2 = \sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(x, y)v_i v_j$....? ($v^T$ denota o vetor transposto).

13. Achar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^4 tal que $vH_f(x, y)v^T > 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. (Considere funções do tipo $x^{2n} + y^{2n}$)

14. Achar $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $vH_f(x)v^T > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$? e todo $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0)\}$ (neste caso, $H_f(x)$ é a matriz de ordem $n \times n$ dada por $H_f(x) = (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})_{i,j}$. [Lembre, i indica a fila e j a coluna.]

15. Achar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^4 tal que $vH_f(x, y)v^T < 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

16. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função. Defina os conceitos de máximo local, mínimo global, máximo global e mínimo local de f.

17. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 e $a \in A$. Se $a \in D$ é ponto de mínimo (máximo) local de f, então $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = 0$ para todo $v \neq 0$.?

18. Seja $n > 1$, $D \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 e $a \in A$. Se $a \in D$ é tal que $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = 0$ para todo $v \neq 0$, então a é ponto de mínimo ou máximo local de f..?

19. Suponha que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^4 e que $a \in \mathbb{R}^2$ é um ponto crítico de f, ou seja $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = 0$ para todo $v \neq 0$. Se $vH_f(x, y)v^T > 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, que pode dizer de a (é máximo local, é mínimo local ?) Se $vH_f(x, y)v^T < 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, que pode dizer de a ?

20. É possivel generalizar o resultado anterior para $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}^n$. ?