# Cálculo Relacional

- Nesta aula são introduzidos conceitos sobre o Cálculo Relacional (CR)
- O CR é uma extensão do Cálculo Proposicional que possui maior capacidade de representação de conhecimento
- O CR é também denominado Cálculo de Predicados ou Lógica de Primeira Ordem (LPO)

Inteligência Artificial

José Augusto Baranauskas
Departamento de Física e Matemática – FFCLRP-USP
E-mail: augusto@usp.br
URL: http://dfm.fmrp.usp.br/~augusto

# Introdução

- No Cálculo Proposicional, utilizamos proposições para representação de conceitos
- No Cálculo Relacional utilizaremos
  - Objetos (pertencentes a um domínio D)
  - Fatos sobre objetos
  - Relações ou relacionamentos entre os objetos de D



# Motivação

- Dado o domínio D={Angélica, Ana Laura, Cláudia}
- Para expressar que todas as mulheres são bonitas no Cálculo Proposicional, é necessário definir uma proposição para cada mulher do domínio D
- p: Angélica é bonita
- q: Ana Laura é bonita
- r: Cláudia é bonita



# Motivação

- Suponha D = conjunto de todos brasileiros
- Expressar que todas as mulheres são bonitas torna-se inviável (para domínios com grande número de elementos)

- Por exemplo:

Angélica é bonita
Ana Laura é bonita
Cláudia é bonita
Wilma é bonita
Maria Alice é bonita
Ana Paula é bonita
Maria Helena é bonita
...



# Solução

- Utilizar variáveis para representar elementos não específicos do domínio
- Por exemplo:
  - Para todo X∈D, **se** X é mulher **então** X é bonita

  ou ainda,
  - Para todo X∈D, mulher(X) → bonita(X)

  ou ainda pode-se omitir D, já que é conhecido
  - Para todo X, mulher(X) → bonita(X)



# Predicados

- Para todo X, mulher(X) → bonita(X)
  - Para todo X: é o quantificador da variável X
  - X: é uma variável
  - mulher, bonita: são predicados
- Predicado é uma relação com argumentos que possui valor-verdade associado **v(erdade)** ou **f(also)**

## Definições

- Símbolos Constantes
- Símbolos Variáveis
- Símbolos Funcionais
- Símbolos Predicados
- Termos
- Átomos
- Símbolo de Igualdade
- Conectivos
- Quantificadores



## Símbolos Constantes

- Representam um objeto específico (ou elemento) do domínio do discurso (ou universo) D
- São representados por nomes que se iniciam com uma letra minúscula ou números inteiros ou reais
- Exemplos:
  a, b, x, maria, 3, 10e+5



## Símbolos Variáveis

- Representam um objeto não específico domínio do discurso D
- São representados por nomes que se iniciam com letras maiúsculas
- Assumem apenas valores do domínio D
- Exemplos:
  - A, B, X, Y, Alguém
  - se D = {júlia, mônica, carolina},
    X não pode assumir o valor "fernando"



## Símbolos Funcionais

- Representam funções **f** no domínio D
  **f**: $D^n \mapsto D$, *n* é a aridade (nº de argumentos)
- Usados para **rotular** objetos sem dar nomes a eles
- São representados por nomes que se iniciam com letras minúsculas
- Não possuem valor-verdade associado
- Exemplos:
  - orelha_direita(joão)
  - mãe_de(maria)



## Símbolos Predicados

- Representam relação ou propriedade **p** de um ou mais objetos no domínio D
  **p**: $D^n \mapsto \{v,f\}$, *n* é a aridade (nº de argumentos)
- São representados por nomes que se iniciam com letras minúsculas
- Possuem valor-verdade associado
- Exemplos:
  - gosta(X,Y)
  - empresta(Fulano,Objeto,Alguém)



## Observações

- Símbolos variáveis assumem apenas valores no domínio D
- Símbolos funcionais sem argumentos (n=0) são símbolos constantes
- Símbolos funcionais não possuem valor-verdade associado
- Símbolos predicados possuem valor-verdade associado

## Termos

- Uma constante é um termo
- Uma variável é um termo
- **$f(t_1, t_2, ..., t_n)$** é um termo, onde **f** é um símbolo funcional e $t_1$, $t_2$, ..., $t_n$ são termos
- ($t_1$, $t_2$, ..., $t_n$) é uma tupla de termos
- Exemplos:
  - a, baleia
  - X, Alguém
  - orelha(joão), orelha(mãe(joão))



## Átomos (ou Fórmulas Atômicas)

- Átomo é um símbolo predicado aplicado a uma tupla de termos
- Um átomo assume a forma **$p(t_1, t_2, ..., t_n)$** onde **p** é um símbolo predicado e $t_1$, $t_2$, ..., $t_n$ são termos
- Exemplos:
  - gosta(maria,ana)
  - gosta(maria,X)
  - gosta(maria,mãe(joão))
  - empresta(maria,livro,joão)
  - empresta(maria,livro,mãe(joão))



## Símbolo de Igualdade

- O símbolo de igualdade é utilizado para fazer declarações que afirmam que dois termos se referem ao mesmo objeto
- Exemplo
  - pai(joão) **=** henrique
  - Indica que o objeto referido por “pai(joão)” e o objeto referido por “henrique” são iguais



## Conectivos

Conectivos (onde X é variável, P é predicado):

| | | |
|---|---|---|
| e | $\wedge$ | conjunção |
| ou | $\vee$ | disjunção |
| não | $\neg$ | negação |
| condicional | $\rightarrow$ | condicional |
| bicondicional | $\leftrightarrow$ | bicondicional |
| para todo X, P | $\forall X\ P$ | quant. universal |
| existe X, P | $\exists X\ P$ | quant. existencial |



## Conectivos

Os conectivos:

| | | |
|---|---|---|
| e | $\wedge$ | conjunção |
| ou | $\vee$ | disjunção |
| não | $\neg$ | negação |
| condicional | $\rightarrow$ | condicional |
| bicondicional | $\leftrightarrow$ | bicondicional |

possuem o mesmo significado que no CP



## Quantificadores

- Permitem expressar propriedades ou relações de toda uma coleção de objetos
- Evitam enumeração de cada objeto separadamente
- Atuam apenas sobre objetos do domínio
- Pode-se definir vários quantificadores, desde que cada um atue apenas sobre objetos
- Os dois mais comuns: quantificador universal e quantificador existencial

# Quantificador Universal $\forall$

- Permite enumerar **todos** os objetos do domínio D
- Representado pelo símbolo $\forall$
- $\forall X$ P é lido como
  - "para todo $X \in D$, P é verdade" ou
  - "para todo $X \in D$, P" ou
  - "para todo X, P"
- Exemplo
  - $\forall X$ gosta(ana,X)
  - é lido como "para todo X, Ana gosta deste X" ou "Ana gosta de todos"



# Quantificador Universal $\forall$

Exemplo: "Fredegunda gosta de todos"

- D={frajola, tom, fredegunda}
- $\forall X$ gosta(fredegunda,X) é equivalente a:
- gosta(fredegunda,frajola) $\wedge$<br>gosta(fredegunda,tom) $\wedge$<br>gosta(fredegunda,fredegunda)



# Quantificador Universal $\forall$

Exemplo: "Todos os gatos são mamíferos"

- D={fredegunda, frajola, tom}
- $\forall X$(gato(X) $\rightarrow$ mamífero(X)) equivale a:

  (gato(frajola) $\rightarrow$ mamífero(frajola)) $\wedge$<br>
  (gato(tom) $\rightarrow$ mamífero(tom)) $\wedge$<br>
  (gato(fredegunda) $\rightarrow$ mamífero(fredegunda))
- Note que existe uma **conjunção** entre cada sentença individual (sem o quantificador)
- Assim, é necessário que **todas** sejam **v(erdade)** para que $\forall X$(gato(X) $\rightarrow$ mamífero(X)) seja **v**



# Quantificador Universal $\forall$

- $\forall X$(gato(X) $\rightarrow$ mamífero(X)) equivale a:

  (gato(frajola) $\rightarrow$ mamífero(frajola)) $\wedge$<br>
  (gato(tom) $\rightarrow$ mamífero(tom)) $\wedge$<br>
  (gato(fredegunda) $\rightarrow$ mamífero(fredegunda))
- Sabendo que Frajola e Tom são gatos, tem-se:

  (**v** $\rightarrow$ mamífero(tom)) $\wedge$<br>
  (**v** $\rightarrow$ mamífero(frajola)) $\wedge$<br>
  (**f** $\rightarrow$ mamífero(fredegunda))
- Obtém-se uma afirmativa sobre sobre o lado direito da implicação apenas para objetos que satisfazem o lado esquerdo
- $\rightarrow$ é o conectivo natural para uso com $\forall$



# Quantificador Existencial $\exists$

- Permite enumerar **pelo menos um** objeto do domínio D
- Representado pelo símbolo $\exists$
- $\exists X$ P é lido como
  - "existe um $X \in D$ tal que P é verdade" ou
  - "existe um $X \in D$, P" ou
  - "existe X, P"
- Exemplo: $\exists X$ gosta(ana,X) é lido como "existe X tal que Ana gosta deste X" ou "Ana gosta alguém"



# Quantificador Existencial $\exists$

Exemplo:

- D={frajola, tom, fredegunda}
- $\exists X$ gosta(fredegunda,X) é equivalente a:

  gosta(fredegunda,frajola) $\vee$<br>
  gosta(fredegunda,tom) $\vee$<br>
  gosta(fredegunda,fredegunda)
- Note que existe uma **disjunção** entre cada sentença individual (sem quantificador)
- Assim, é necessário que **pelo menos uma** seja **v(erdade)** para que $\exists X$ gosta(ana,X) seja **v**

## Quantificador Existencial ∃

Exemplo: "Existe uma mulher bonita"

- D={frajola, tom, fredegunda}
- ∃X mulher(X) ∧ bonita(X) é equivalente a:

  (mulher(frajola) ∧ bonita(frajola)) ∨
  (mulher(tom) ∧ bonita(tom)) ∨
  (mulher(fredegunda) ∧ bonita(fredegunda))
- Sabendo-se que Fredegunda é uma mulher bonita(!), a terceira disjunção é verdadeira, tornando a sentença original verdadeira
- ∧ é o conectivo natural para uso com ∃



## Simbolização

- Assim, como no CP é possível simbolizar sentenças em linguagem natural no Cálculo Relacional
- Normalmente, adotam-se nomes significativos para predicados, constantes e símbolos funcionais
- É comum também definir o significado de cada predicado ou símbolo funcional
- Ex: gosta(A,B): A gosta de B



## Exercício

Dado o esquema abreviador

- e(X,Y): X estuda Y
- gosta(X,Y): X gosta de Y

Simbolizar as seguintes frases

- Ana gosta do livro
- Ana estuda o livro
- Se Ana estuda o livro então ela gosta dele
- Ana gosta da mão de Pedro



## Solução

•e(X,Y): X estuda Y
•gosta(X,Y): X gosta de Y

- Ana gosta do livro
  gosta(ana,livro)
- Ana estuda o livro
  e(ana,livro)
- Se Ana estuda o livro então ela gosta dele
  e(ana,livro) → gosta(ana,livro)
- Ana gosta da mão de Pedro
  gosta(ana,mão(pedro))



## Simbolização

- Embora nomes significativos para os seres humanos sejam adotados para predicados, constantes e símbolos funcionais, é importante lembrar que, para o mecanismo de inferência, eles são apenas símbolos
- O mecanismo de inferência utiliza os símbolos respeitando as regras da linguagem para derivar novas sentenças válidas
- Entretanto, somente os seres humanos é que dão valor semântico real ao significado dos símbolos associados, por exemplo gato(X) indica que X é um animal mamífero com pelos, etc
- Para o mecanismo de inferência é indiferente representar um gato como "gato(X)" ou "g(X)" ou "cat(X)" ou "c(X)" ou "a(X)" ou ...



## Simbolização

- A simbolização permite transformar uma sentença em linguagem natural para a linguagem lógica (e vice-versa)
- Não existe uma única forma de simbolizar um determinado conhecimento
- Por exemplo: "A casa é amarela"
  - amarela(casa1)
  - cor(casa1,amarela)
  - valor(cor,casa1,amarela)
  - é(casa1,amarela)
- No *slide* seguinte
  - **X** é uma variável (por estar sempre quantificada)
  - **m** é uma propriedade ou relação (predicado)
  - **n** é uma propriedade ou relação (predicado)

## Simbolização

- $\forall X\ (m(X) \rightarrow n(X))$
  - Todo **m** é **n**
  - **m** são **n**
  - Cada **m** é um **n**
  - Qualquer **m** é um **n**
  - Todos os objetos com a propriedade **m** são objetos que têm a propriedade **n**
- $\forall X\ (m(X) \rightarrow \neg n(X))$
  - Nenhum **m** é **n**
  - Ninguém que seja **m** é **n**
  - Nada que seja **m** é **n**
  - Nenhum dos **m** é **n**
- $\exists X\ (m(X) \wedge n(X))$
  - Alguns **m** são **n**
  - Existem **m** que são **n**
  - Há **m** que são **n**
  - Alguns **m** são **n**
- $\exists X\ (m(X) \wedge \neg n(X))$
  - Alguns **m** são não **n**
  - Alguns **m** não são **n**
  - Certos **m** não são **n**
  - Existem **m** que não são **n**
  - Pelo menos um **m** não é **n**



## Exemplos

- Todos os homens são mortais
  - $\forall X\ (homem(X) \rightarrow mortal(X))$
- Alguns gatos são amarelos
  - $\exists X\ (gato(X) \wedge amarelo(X))$
- Nenhuma baleia é peixe
  - $\forall X\ (baleia(X) \rightarrow \neg peixe(X))$
- Nem tudo que é reluz é ouro
  - $\exists X\ (reluz(X) \wedge \neg ouro\ (X))$
  - $\neg\forall X\ (reluz(X) \rightarrow ouro(X))$
- Meninas e meninos gostam de brincar
  - $\forall X\ (menina(X) \vee menino(X) \rightarrow gosta(X,brincar))$
  - $\forall X\ (menino(X) \rightarrow gosta(X,brincar)) \wedge \forall Y\ (menina(Y) \rightarrow gosta(Y,brincar))$
- Leite e banana são nutritivos
  - $\forall X\ (leite(X) \vee banana(X) \rightarrow nutritivo(X))$



## Exemplos

- Há pintores que não são artistas mas artesãos
  - $\exists X\ (pintor(X) \wedge \neg artista(X) \wedge artesão(X))$
- Não há crime sem lei que o define
  - $\forall X\ (crime(X) \rightarrow \exists Y(lei(Y) \wedge define(Y,X))$
- Jacó não foi o primeiro homem
  - $\exists X\ (homem(X) \wedge nasceu(X,DataX) \wedge nasceu(jacó,D) \wedge DataX < D)$
- Não há bom livro escrito por maus autores
  - $\forall X\ ((livro(X) \wedge bom(X) \rightarrow \exists Y(autor(Y) \wedge bom(Y) \wedge escreveu(Y,X)))$
- Todos os números pares são divisíveis por dois
  - $\forall X\ (natural(X) \wedge par(X) \rightarrow divisível(X,2))$
- Todos os animais devem ser protegidos pelos homens
  - $\forall X\ \forall Y\ (homem(X) \wedge animal(Y) \rightarrow protege(X,Y)\ )$
- Todos os homens foram gerados por alguma mulher
  - $\forall X\ (homem(X) \rightarrow \exists Y\ (mulher(Y) \wedge mãe(Y,X))$
- Há pelo menos dois senadores
  - $\exists X\ \exists Y\ (senador(X) \wedge senador(Y) \wedge X \neq Y)$



## Traduzir para Linguagem Natural

- $p(X)$ : X é uma pessoa
- $e(X,Y)$ : X engana Y
- $\forall X((p(X) \wedge \exists Y(p(Y) \wedge e(X,Y))) \rightarrow e(X,X)$

Pessoas que enganam outras pessoas enganam a si mesmas



## Traduzir para Linguagem Natural

- $e(X)$ : X é um erro
- $h(X)$ : X é humano
- $f(X,Y)$ : X faz Y

1) $\forall X(h(X) \rightarrow \exists Y(e(Y) \wedge f(X,Y)))$

Todo ser humano erra

2) $\forall X(\exists Y(e(Y) \wedge \neg f(X,Y)) \rightarrow \neg h(X))$

Quem quer que não cometa erros não é humano

Não é humano quem não erra



## Fórmulas Bem Formadas (wff)

1. um átomo é uma wff
2. se $\alpha$ e $\beta$ são wff e X uma variável livre, então são também wff:

| wff | lê-se |
|---|---|
| $\neg\alpha$ | não $\alpha$ |
| $\alpha \wedge \beta$ | $\alpha$ e $\beta$ |
| $\alpha \vee \beta$ | $\alpha$ ou $\beta$ |
| $\alpha \rightarrow \beta$ | se $\alpha$ então $\beta$ |
| $\alpha \leftrightarrow \beta$ | $\alpha$ se e somente se $\beta$ |
| $\forall X\ \alpha$ | para todo X, $\alpha$ |
| $\exists X\ \alpha$ | existe X, $\alpha$ |

3. As únicas wff são definidas por (1) e (2)

# Prioridade dos Conectivos

maior prioridade

$\neg$

$\wedge$

$\vee$

$\rightarrow$

$\leftrightarrow$

$\forall X$, $\exists X$

menor prioridade



# Prioridade dos Conectivos

- Exemplo
  - $\forall X\ p(X) \rightarrow \exists Y\ q(X,Y) \wedge p(Y)$ significa $\forall X\ (p(X) \rightarrow (\exists Y\ (q(X,Y) \wedge p(Y))))$
- A precedência pode ser alterada pelo uso de parênteses



# Semântica do CR

- Para interpretar uma wff no CR é necessário definir o domínio D
- Se os valores-verdade das fórmulas $\alpha$ e $\beta$ são calculados, então os valores-verdade das fórmulas:
  - $\neg\alpha$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$ e $(\alpha \leftrightarrow \beta)$
  - são determinados usando tabelas-verdade dos conectivos, como definido no Cálculo Proposicional
- $\forall X\ \alpha$ é **v** se o valor-verdade de $\alpha$ for **v** para todo X no domínio D; caso contrário será **f**
- $\exists X\ \alpha$ é **v** se o valor-verdade de $\alpha$ for **v** para pelo menos um X no domínio D; caso contrário será **f**



# Semântica do CR

- Uma fórmula $\beta$ é satisfatível (consistente) se e somente se existe uma interpretação I tal que $\beta$ é **v** em I
- Uma fórmula $\beta$ é insatisfatível (inconsistente) se e somente se **não** existe uma interpretação I tal que $\beta$ é **v**
- Uma fórmula $\beta$ é válida (tautologia) se e somente se toda interpretação I de $\beta$ é **v**



# Conseqüência Lógica

- Uma fórmula $\alpha$ é **conseqüência lógica** de $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ se e somente se para toda interpretação I, se $(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \ldots \wedge \beta_n)$ é **v** em I então $\alpha$ é **v** em I
- Notação
  - $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \models \alpha$
- $\alpha$ é equivalente a $\beta$ ($\alpha \equiv \beta$) se e somente se $(\alpha \models \beta) \wedge (\beta \models \alpha)$
- Os Teoremas sobre conseqüência lógica vistos no CP também são válidos no CR



# Fórmulas Válidas

- $\forall X\ P(X) \rightarrow \exists X\ P(X)$
- $(\forall X\ P(X) \vee \forall X\ Q(X)) \rightarrow \forall X\ (P(X) \vee Q(X))$
- $\exists X\ (P(X) \wedge Q(X)) \rightarrow (\exists X\ P(X) \wedge \exists X\ Q(X))$
- $\forall X\ (P(X) \rightarrow Q(X)) \rightarrow (\forall X\ P(X) \rightarrow \forall X\ Q(X))$
- $\forall X\ (P(X) \rightarrow c) \rightarrow (\exists X\ P(X) \rightarrow c)$

## Equivalência entre $\forall$ e $\exists$

- $\forall X\, P(X) \equiv (\neg\exists X)\,(\neg P(X))$
- $\forall X\, (\neg P(X)) \equiv (\neg\exists X)\, P(X)$
- $\exists X\, (\neg P(X)) \equiv (\neg\forall X)\, P(X)$
- $\exists X\, P(X) \equiv (\neg\forall X)\,(\neg P(X))$
- $\neg(\forall X\, P(X)) \equiv (\neg\forall X)\, P(X)$
- $\neg(\exists X\, P(X)) \equiv (\neg\exists X)\, P(X)$



## Fórmulas Relacionais Equivalentes

- $P \wedge \forall X\, Q \equiv \forall X\, (P \wedge Q)$, se X não ocorre em P
- $P \wedge \exists X\, Q \equiv \exists X\, (P \wedge Q)$, se X não ocorre em P
- $P \vee \forall X\, Q \equiv \forall X\, (P \vee Q)$, se X não ocorre em P
- $P \vee \exists X\, Q \equiv \exists X\, (P \vee Q)$, se X não ocorre em P
- $(\forall X\, P) \wedge (\forall X\, Q) \equiv \forall X\, (P \wedge Q)$
- $(\exists X\, P) \vee (\exists X\, Q) \equiv \exists X\, (P \vee Q)$
- $(\forall X\, P) \vee (\exists X\, Q) \equiv \forall X\, \exists Y\, (P \vee Q)$
- $(\exists X\, P) \wedge (\forall X\, Q) \equiv \exists X\, \forall Y\, (P \wedge Q)$
- $P \rightarrow (\forall X\, Q) \equiv \forall X\, (P \rightarrow Q)$, se X não ocorre em P
- $P \rightarrow (\exists X\, Q) \equiv \exists X\, (P \rightarrow Q)$, se X não ocorre em P
- $\forall X\, (P \rightarrow Q) \equiv \exists X\, (P \rightarrow Q)$, se X não ocorre em Q
- $\exists X\, (P \rightarrow Q) \equiv \forall X\, (P \rightarrow Q)$, se X não ocorre em Q



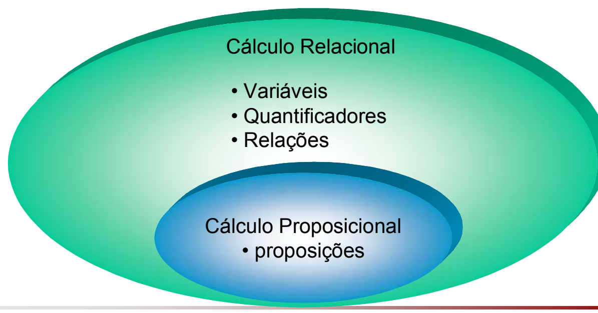
## Restrições Semânticas do CR

- Uma *mesma variável* não pode ser quantificada mais de uma vez
  - $\forall X\, \exists X$ pessoa(X) é ilegal
  - $\forall X\, (p(X) \rightarrow \exists X\, q(X))$ é permitido e é equivalente a $\forall X\, (p(X) \rightarrow \exists Y\, q(Y))$
- Um símbolo predicado ou funcional deve sempre ter o mesmo número de argumentos. Entretanto, esta restrição não existe em Prolog
- Valores de todas as constantes, variáveis e argumentos de símbolos funcionais e predicados devem ser extraídos do universo do discurso D



## Pontos Importantes

- CP é um subconjunto do CR






## Pontos Importantes

- Propriedades e relacionamentos entre objetos são expressados na forma de predicados
- O número de argumentos de predicados e símbolos funcionais é a sua *aridade*
- Variáveis representam objetos do domínio D
- Quantificadores atuam apenas sobre variáveis, ou seja, apenas sobre objetos do domínio D



## Formas Normais

- Como visto anteriormente, dada uma fórmula do Cálculo Proposicional, é sempre possível determinar a Forma Normal Conjuntiva ou a Forma Normal Disjuntiva equivalentes
- No Cálculo Relacional existe também uma Forma Normal chamada de Forma Normal Prenex — FNP
- O fato de uma fórmula estar na Forma Prenex simplifica procedimentos de manipulação da fórmula
- A FNP de uma fórmula é importante na medida que sua obtenção é um passo necessário para a obtenção da Forma Normal Conjuntiva — esta última utilizada pelo Método de Resolução

## Forma Normal Prenex - FNP

- Uma wff do CR está na FNP quando todos os quantificadores que ocorrem estão prefixando a wff
- Exemplos:
  - $\forall X\ (m(x) \rightarrow n(x))$
  - $\exists X\ (m(X) \wedge n(X))$
  - $\forall X\ \exists Y\ \forall Z\ (p(X,Y) \rightarrow q(X,Z))$
  - $\forall X\ \exists Y\ \forall Z\ (p(X,Y) \rightarrow r(X) \wedge r(Z))$
  - $\forall X\ \exists Y\ \forall Z\ (p(X, Y) \wedge q(X,Z))$
  - $\forall X\ \forall Y\ (p(X, Y) \wedge q(Y))$
  - $\forall X\ \exists Y\ (\neg p(X, Y) \rightarrow q(Y))$
  - $\forall X\ \forall Y\ (p(X,Y) \rightarrow (q(X) \wedge q(Y)))$



## Forma Normal Prenex - FNP

- Uma *wff* F do CR está na FNP se e somente se está na forma:

$$(Q_1X_1)\ (Q_2X_2)\ \ldots\ (Q_nX_n)\ (M)$$

- onde:
  - $(Q_iX_i)$ é $\forall X_i$ ou $\exists X_i$, i=1,2,...,*n*
  - $X_i$ é uma variável
  - M é uma wff que não contém quantificadores
- $(Q_1X_1)\ (Q_2X_2)\ldots(Q_nX_n)$ é prefixo de F
- M é a matriz de F



## Forma Normal Conjuntiva

- Uma wff F do CR está na FNC se e somente se está na FNP e sua matriz for uma conjunção de disjunções
- Exemplo:

$$\forall X\ \exists Y\ \forall Z\ (p(X,Y) \vee r(X)) \wedge r(Z) \wedge (r(Y) \vee q(Z))$$



## Notação Clausal

1. Eliminar variáveis livres
2. Eliminar quantificadores redundantes
3. Renomear variáveis quantificadas mais de uma vez
4. Remover equivalências e implicações
5. Mover a negação para o interior da fórmula
6. Eliminar os quantificadores existenciais
7. Obter a FNP e remover quantificadores universais
8. Colocar a matriz da FNP na forma conjuntiva
9. Eliminar as conjunções
10. Renomear as variáveis em cada cláusula



## Notação Clausal: passo 1

- Eliminar variáveis livres
  - Se a fórmula $\alpha$ contém uma variável livre, substituir $\alpha$ por **$\exists$X ($\alpha$)**
  - Este passo deve ser repetido até que a fórmula não contenha mais variáveis livres
- Exemplo
  - gosta(joão,X) é substituído por
  - $\exists$X gosta(joão,X)



## Notação Clausal: passo 2

- Eliminar todo quantificador $\forall$X ou $\exists$X que não contenha nenhuma ocorrência livre de X no seu escopo — isto é, eliminar todo quantificador desnecessário
- Exemplo
  - A fórmula
    - $\forall X \forall \mathbf{Z}\ (h(X) \rightarrow \exists Y(e(Y) \wedge f(X,Y)))$
  - torna-se:
    - $\forall X\ (h(X) \rightarrow \exists Y(e(Y) \wedge f(X,Y)))$

# Notação Clausal: passo 3

- Renomear variáveis quantificadas mais do que uma vez
- Se uma mesma variável é governada por dois quantificadores, substituir a variável de um deles e todas as suas ocorrências livres no escopo do quantificador por uma nova variável que não ocorra na fórmula
- Este passo deve ser repetido até que todos os quantificadores governem variáveis diferentes
- Por exemplo, o invés da fórmula:
  - $\forall X\ (p(X) \rightarrow \exists X\ q(X))$
- deve-se escrever
  - $\forall X\ (p(X) \rightarrow \exists Y\ q(Y))$



# Notação Clausal: passo 4

- Remover equivalências e implicações
  - $\alpha \rightarrow \beta \quad \equiv \quad \neg\alpha \vee \beta$
  - $\alpha \leftrightarrow \beta \quad \equiv \quad (\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \neg\beta)$



# Notação Clausal: passo 5

- Mover a negação para o interior da fórmula
- Os sinais de negação são movidos de fora dos parênteses para a frente dos átomos, usando as generalizações de De Morgan e o fato de $\neg(\neg\alpha) \equiv \alpha$
- Em expressões complexas, é conveniente começar com as negações mais externas, uma vez que irão cancelar negações internas
- Então, até que a ocorrência de $\neg$ preceda imediatamente uma fórmula atômica, substitui-se:
  - $(\neg\forall X)\ \alpha \quad \equiv \exists X\ (\neg\alpha)$
  - $(\neg\exists X)\ \alpha \quad \equiv \forall X\ (\neg\alpha)$
  - $\neg(\alpha \wedge \beta) \quad \equiv (\neg\alpha \vee \neg\beta)$
  - $\neg(\alpha \vee \beta) \quad \equiv (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$
  - $\neg(\neg\alpha) \quad \equiv \alpha$



# Notação Clausal: passo 6

- Eliminar os quantificadores existenciais: **Skolemização**
- Seja a *wff* $\forall Y\ \exists X\ p(X,Y)$ que pode ser lida como para todo Y, existe um X — possivelmente dependente de Y — tal que p(X,Y)
- Pelo fato do quantificador existencial estar dentro do escopo do quantificador universal, é aberta a possibilidade do X que existe, depender do valor de Y
- Essa dependência pode ser explicitamente evidenciada mediante uma função g(Y), a qual mapeia cada valor de Y no X que existe
- Essa função é chamada de função de **Skolem**
- Se a função de Skolem for utilizada no lugar do X que existe, pode-se eliminar o quantificador existencial e reescrever a fórmula anterior como: $\forall Y\ p(g(Y),Y)$
- A regra geral para a eliminação de um quantificador existencial de uma *wff* é a de substituir cada ocorrência de suas variáveis quantificadas existencialmente por uma função de Skolem, que tem como argumentos aquelas variáveis quantificadas universalmente, cujo escopo do quantificador universal inclui o escopo do quantificador existencial sendo eliminado



# Notação Clausal: passo 6 (cont.)

- Por exemplo, dada a fórmula:
  - $\forall W\ q(W) \rightarrow \forall X\ (\forall Y\ (\exists Z\ p(X,Y,Z) \rightarrow \forall U\ r(X,Y,U,Z)))$
- ao eliminar o $\exists Z$ dela, obtém-se:
  - $\forall W\ q(W) \rightarrow \forall X\ (\forall Y\ p(X,Y,g(X,Y)) \rightarrow \forall U\ r(X,Y,U,g(X,Y)))$
- Se o quantificador existencial sendo eliminado não está dentro do escopo de nenhum quantificador universal, então é usada a função de Skolem sem argumentos, a qual é simplesmente uma constante
- Assim, a fórmula:
  - $\exists X\ p(X)$ torna-se p(**a**)
- O símbolo **a** é usado como referência a um objeto que é sabido que existe e deve ser um novo símbolo constante, e não um símbolo já usado em referência a objetos conhecidos
- Para eliminar todas as variáveis existencialmente quantificadas de uma wff, usa-se, repetidamente, o procedimento descrito



# Notação Clausal: passo 7

- Obter a FNP e remover os quantificadores universais
- Neste ponto não há mais quantificadores $\exists$ e cada $\forall$ atua sobre sua própria variável
- Basta mover os $\forall$ para a frente da fórmula, deixando-a na FNC

## Notação Clausal: passo 8

- Colocar a matriz da FNP na forma conjuntiva
- Qualquer matriz pode ser escrita como uma conjunção de um conjunto finito de disjunções de literais — FNC
- Então, até que a matriz da fórmula seja uma conjunção de disjunções, substituir:
  - $(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \quad \equiv (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma)$
  - $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \quad \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$



## Notação Clausal: passo 9

- Eliminar os símbolos $\wedge$
- Pode-se agora eliminar as ocorrências explícitas dos símbolos $\wedge$, substituindo-se expressões da forma $(F_1 \wedge F_2)$ pelo conjunto de *wffs* $\{F_1,F_2\}$
- O resultado de repetidas substituições é um conjunto de *wffs*, cada uma delas sendo uma disjunção de literais — cláusula



## Notação Clausal: passo 10

- Renomear variáveis
- Símbolos variáveis podem ser renomeados de forma que um símbolo variável não apareça em mais do que em uma cláusula
- Lembrar que $\forall X\ (p(X) \wedge q(X))$ é equivalente a $\forall X\ p(X) \wedge \forall Y\ q(Y)$



## Exemplo 1

- $\forall X \forall Y\ (p(X,Y) \rightarrow q(X,Y) \wedge r(Y))$
  - (4) $\forall X \forall Y\ (\neg p(X,Y) \vee (q(X,Y) \wedge r(Y)))$
  - (7) $(\neg p(X,Y) \vee (q(X,Y) \wedge r(Y)))$
  - (8) $((\neg p(X,Y) \vee q(X,Y)) \wedge (\neg p(X,Y) \vee r(Y)))$
- Notação Clausal (9,10)
  - $q(X1,Y1) \vee \neg p(X1,Y1)$
  - $r(Y2) \vee \neg p(X2,Y2)$
- Notação de Kowalski
  - $q(X1,Y1) \leftarrow p(X1,Y1)$
  - $r(Y2) \leftarrow p(X2,Y2)$



## Exemplo 2

- $\forall X\ (p(X) \rightarrow q(X) \wedge \forall X\ r(X))$
  - (3) $\forall X\ (p(X) \rightarrow q(X) \wedge \forall Y\ r(Y))$
  - (4) $\forall X\ (\neg p(X) \vee (q(X) \wedge \forall Y\ r(Y)))$
  - (7) $\forall X \forall Y\ (\neg p(X) \vee (q(X) \wedge r(Y)))$
    - (7) $(\neg p(X) \vee (q(X) \wedge r(Y)))$
  - (8) $((\neg p(X) \vee q(X)) \wedge (\neg p(X) \vee r(Y)))$
- Notação Clausal (9,10)
  - $q(X1) \vee \neg p(X1)$
  - $r(Y2) \vee \neg p(X2)$
- Notação de Kowalski
  - $q(X1) \leftarrow p(X1)$
  - $r(Y2) \leftarrow p(X2)$



## Exercícios

- Coloque na notação clausal as seguintes *wffs*:
  1. $\forall X\ (gato(X) \rightarrow \exists Y\ gosta(Y,X))$
  2. $\forall X\ (humano(X) \rightarrow \exists Y\ (erro(Y) \wedge comete(X,Y)))$

## Solução Exercício 1

- ∀X (gato(X) → ∃Y gosta(Y,X))
  - (4) ∀X (¬gato(X) ∨ ∃Y gosta(Y,X))
  - (6) ∀X (¬gato(X) ∨ gosta(f(X),X))
  - (7) (¬gato(X) ∨ gosta(f(X),X))
- Notação Clausal (9,10)
  - gosta(f(X),X) ∨ ¬gato(X)
- Notação de Kowalski
  - gosta(f(X),X) ← gato(X)



## Solução Exercício 2

- ∀X (humano(X) → ∃Y (erro(Y) ∧ comete(X,Y)))
  - (4) ∀X (¬humano(X) ∨ ∃Y (erro(Y) ∧ comete(X,Y)))
  - (6) ∀X (¬humano(X) ∨ (erro(f(X)) ∧ comete(X,f(X))))
  - (7) (¬humano(X) ∨ (erro(f(X)) ∧ comete(X,f(X))))
  - (8) (¬humano(X) ∨ erro(f(X))) ∧ (¬humano(X) ∨ comete(X,f(X)))
- Notação Clausal (9,10)
  - erro(f(X1)) ∨ ¬humano(X1)
  - comete(X2,f(X2)) ∨ ¬humano(X2)
- Notação de Kowalski
  - erro(f(X1)) ← humano(X1)
  - comete(X2,f(X2)) ← humano(X2)



## Prova por Resolução

- O método da Resolução utiliza uma fórmula na FNC para realizar inferências
- Pré-requisito: 2 cláusulas pais
  - um literal p(X,Y,...) em uma das cláusulas pai (P1)
  - um literal ¬p(U,V,...) na outra cláusula pai (P2)
  - nova cláusula é chamada resolvente (R) contendo todos os literais de P1 e P2, exceto p mediante a unificação θ={X/U, Y/V, ...}
- Formato Geral
  - P1: p(X,Y,...) **ou** mais-literais
  - P2: ¬p(U,V,...) **ou** ainda-mais-literais
  - R: mais-literais **ou** ainda-mais-literais (com θ={X/U, Y/V, ...})



## Prova por Resolução

- Regra de Resolução:

| | |
|---|---|
| de | animal(f(X)) ∨ a~~m~~a(g(X),X) |
| e | ¬mata(U,V) ∨ ¬a~~m~~a(U,V) |
| deduz-se | animal(f(X)) ∨ ¬mata(g(X),X) |
| com | θ={U/g(X), V/X} |

- Esta regra permite combinar duas fórmulas por meio da eliminação de átomos complementares (um é a negação do outro)



## Exemplo

- Todo mundo que ama todos os animais é amado por alguém
- Qualquer um que mata um animal é amado por ninguém
- João ama todos os animais
- João ou a Curiosidade matou o gato, que se chama Frajola
- A Curiosidade matou o gato?



## Exemplo

- Todo mundo que ama todos os animais é amado por alguém
  - ∀X (∀Y animal(Y) → ama(X,Y)) → ∃Z ama(Z,X)
- Qualquer um que mata um animal é amado por ninguém
  - ∀X (∃Y animal(Y) ∧ mata(X,Y)) → ∀Z ¬ama(Z,X)
- João ama todos os animais
  - ∀X animal(X) → ama(joão,X)
- João ou a Curiosidade matou o gato, que se chama Frajola
  - mata(joão,frajola) ∨ mata(curiosidade,frajola)
  - gato(frajola)
  - ∀X gato(X) → animal(X)
- A Curiosidade matou o gato? (negar conclusão)
  - ¬mata(curiosidade,frajola)

# Exemplo na FNC

- Todo mundo que ama todos os animais é amado por alguém
  - ∀X (∀Y animal(Y) → ama(X,Y)) → ∃Z ama(Z,X)
    - ($C_1$) animal(f(X)) ∨ ama(g(X),X)
    - ($C_2$) ¬ama(X,f(X)) ∨ ama(g(X),X)
- Qualquer um que mata um animal é amado por ninguém
  - ∀X (∃Y animal(Y) ∧ mata(X,Y)) → ∀Z ¬ama(Z,X)
    - ($C_3$) ¬animal(Y) ∨ ¬mata(X,Y) ∨ ¬ama(Z,X)
- João ama todos os animais
  - ∀X animal(X) → ama(joão,X)
    - ($C_4$) ¬animal(X) ∨ ama(joão,X)
- João ou a Curiosidade matou o gato, que se chama Frajola
  - ($C_5$) mata(joão,frajola) ∨ mata(curiosidade,frajola)
  - ($C_6$) gato(frajola)
  - ∀X gato(X) → animal(X)
    - ($C_7$) ¬gato(X) ∨ animal(X)
- A Curiosidade matou o gato? (negar conclusão)
  - ($C_8$) ¬mata(curiosidade,frajola)

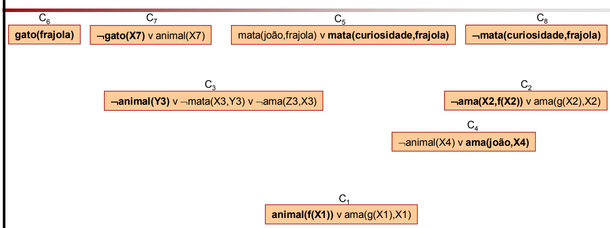


# Exemplo na FNC com Variáveis Renomeadas

- Todo mundo que ama todos os animais é amado por alguém
  - ∀X (∀Y animal(Y) → ama(X,Y)) → ∃Z ama(Z,X)
    - ($C_1$) animal(f(X1)) ∨ ama(g(X1),X1)
    - ($C_2$) ¬ama(X2,f(X2)) ∨ ama(g(X2),X2)
- Qualquer um que mata um animal é amado por ninguém
  - ∀X (∃Y animal(Y) ∧ mata(X,Y)) → ∀Z ¬ama(Z,X)
    - ($C_3$) ¬animal(Y3) ∨ ¬mata(X3,Y3) ∨ ¬ama(Z3,X3)
- João ama todos os animais
  - ∀X animal(X) → ama(joão,X)
    - ($C_4$) ¬animal(X4) ∨ ama(joão,X4)
- João ou a Curiosidade matou o gato, que se chama Frajola
  - ($C_5$) mata(joão,frajola) ∨ mata(curiosidade,frajola)
  - ($C_6$) gato(frajola)
  - ∀X gato(X) → animal(X)
    - ($C_7$) ¬gato(X7) ∨ animal(X7)
- A Curiosidade matou o gato? (negar conclusão)
  - ($C_8$) ¬mata(curiosidade,frajola)

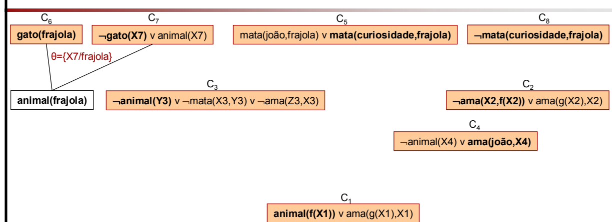


# Aplicando Resolução



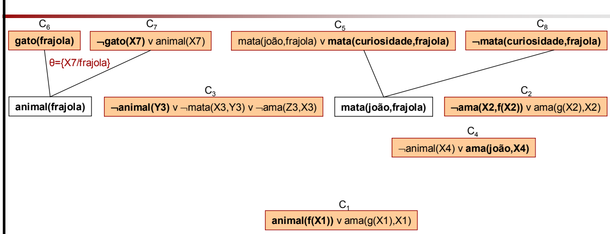



# Aplicando Resolução



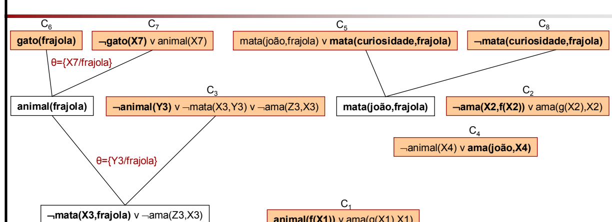



# Aplicando Resolução

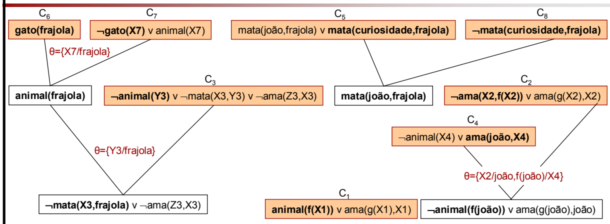





# Aplicando Resolução

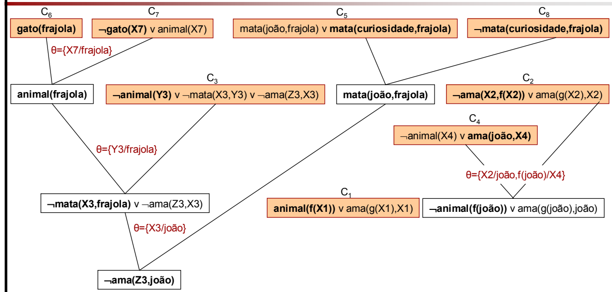


# Aplicando Resolução



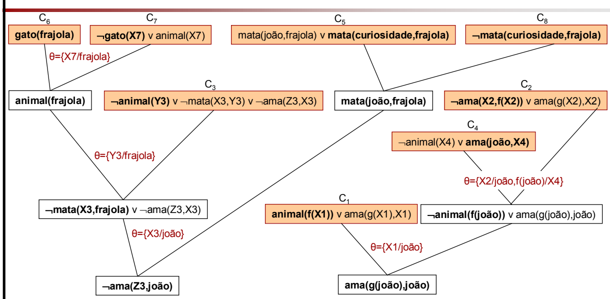



# Aplicando Resolução



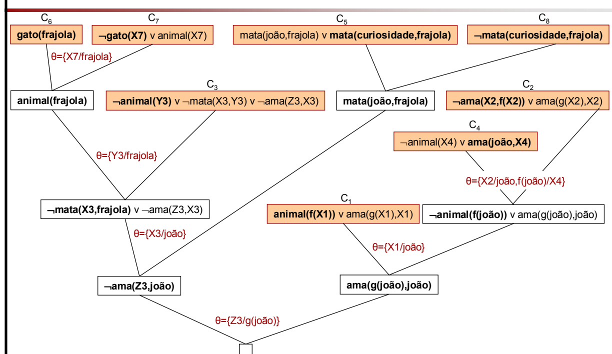



# Aplicando Resolução






# Aplicando Resolução






Slides baseados em:

Monard, M.C. & Nicoletti, M.C., *O Cálculo de Predicados e a Linguagem Prolog,* Notas Didáticas do ICMC-USP
(http://labic.icmc.usp.br/didatico/pdf/Cpredicados_pdf.zip)

Material elaborado por
José Augusto Baranauskas
Revisão 2007