Cálculo Proposicional

Inteligência Artificial

- Nesta aula são introduzidos conceitos básicos sobre o Cálculo Proposicional (CP)
- O CP é também denominado Cálculo de Proposições ou Lógica de Proposições

José Augusto Baranauskas
Departamento de Física e Matemática – FFCLRP-USP
E-mail: augusto@usp.br
URL: http://dfm.fmrp.usp.br/~augusto

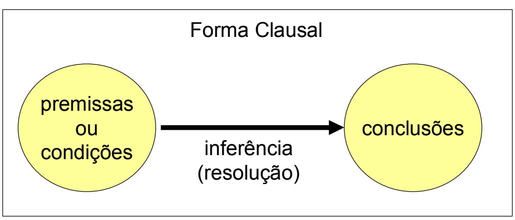
Lógica - Definição

Formalização de alguma linguagem

- **Sintaxe**
  Especificação precisa das expressões legais
- **Semântica**
  Significado das expressões
- **Dedução**
  Provê regras que preservam a semântica

Programação Lógica

- Prolog (Programming in Logic)
- Prolog = cláusulas + resolução
- Uso da lógica para representar conhecimento
- Uso da inferência para manipular o conhecimento



Cálculo Proposicional - CP

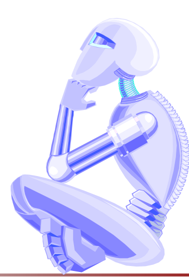
- Cálculo Proposicional ≡ Lógica Proposicional
- Apenas enunciados *declarativos* são permitidos
- Excluídas sentenças exclamativas, imperativas e interrogativas

Termo

É usado para designar objetos

Exemplos:

- Paula
- Um filme de terror
- Triângulo retângulo



Proposição

É uma sentença declarativa que pode assumir os valores *verdade* (v) ou *falso* (f)

Exemplos:

- Todo homem é mortal
- Meu carro é um fusca
- Está chovendo

Proposição Atômica

Sentença que **não** contém conectivos (e, ou, se...então, ...)

- Todo homem é mortal
- Meu carro é um fusca
- Está chovendo

Proposição Composta

Sentença que contém um ou mais conectivos (e, ou, se...então, ...)

- **Se** Maria estuda **então** fará bons exames
- Ele come **e** dorme
- Pedro dança **ou** canta

Proposição - Cuidado!

- As expressões:

~~Está chovendo?~~

~~A viagem entre Ribeirão Preto e Guarujá~~

não são sentenças do CP pois não possuem um valor verdade *verdadeiro* (v) ou *falso* (f) associado

Conceitos Adicionais

- Proposição atômica ≡ átomo
- Proposições atômicas são designadas por letras latinas minúsculas (p, q, r, ...)
- Literal é um átomo ou a negação de um átomo
- Conectivos ou Operadores: permitem a construção de proposições compostas

Conectivos

Conectivos ou Operadores:

- e $\wedge$ (conjunção)
- ou $\vee$ (disjunção)
- não $\neg$ (negação)
- condicional $\rightarrow$ (implicação)
- bicondicional $\leftrightarrow$

Conectivo: e ($\wedge$)

- A partir de duas proposições, obtém-se uma terceira denominada *conjunção*:
- Exemplo:
  - (p) Maria estuda o problema
  - (q) José vai pescar
  - Conjunção de (p) e (q): p $\wedge$ q
    - Maria estuda o problema **e** José vai pescar

Conectivo: ou ($\vee$)

- A partir de duas proposições, obtém-se uma terceira denominada *disjunção*:
- Exemplo:
  - (p) Maria estuda o problema
  - (q) José vai pescar
  - Disjunção de (p) e (q): p $\vee$ q
    - Maria estuda o problema **ou** José vai pescar

Conectivo: não ($\neg$)

- A partir de uma proposição, obtém-se uma segunda denominada *negação*:
- Assim, a negação nega o valor-verdade de uma proposição
- Exemplo:
  - (p) Maria estuda o problema
  - Negação de (p): $\neg$p
    - não (Maria estuda o problema)

Conectivo: condicional ($\rightarrow$)

- Conectivo condicional lido como se...então
- A partir de duas proposições, obtém-se uma terceira denominada *condicional* ou *implicação*
- Proposição à esquerda de $\rightarrow$ denomina-se **premissa** ou **antecedente**
- Proposição à direita de $\rightarrow$ denomina-se **conclusão** ou **conseqüente**
- Exemplo:
  - (p) Eu como muito
  - (q) Eu engordo
  - Condicional de (p) e (q): p $\rightarrow$ q
    - **Se** eu como muito **então** eu engordo

Conectivo: bicondicional ($\leftrightarrow$)

- Conectivo bicondicional é lido como se e somente se
- A partir de duas proposições, obtém-se uma terceira denominada *bicondicional*
- Exemplo:
  - (p) Um triângulo é retângulo
  - (q) Um triângulo tem um ângulo reto
  - Bicondicional de (p) e (q): p $\leftrightarrow$ q
    - Um triângulo é retângulo **se e somente se** tem um ângulo reto

Semântica dos Conectivos

p	q	p$\wedge$q	p$\vee$q	$\neg$p	p$\rightarrow$q	p$\leftrightarrow$q
v	v	v	v	f	v	v
v	f	f	v	f	f	f
f	v	f	v	v	v	f
f	f	f	f	v	v	v

Simbolização

- Processo de substituição de frases em linguagem natural para letras proposicionais e conectivos lógicos
  - Ex: Se chove então Maria Angélica estuda o problema e se não faz frio Ana Laura está nadando
    - p: Maria Angélica estuda o problema
    - q: Ana Laura está nadando
    - r: chove
    - s: faz frio
  - Encontrar conectivos:
    (**Se** chove **então** Maria Angélica estuda o problema) **e**
    (**se** (**não** faz frio) **então** Ana Laura está nadando)
  - Substituir frases e conectivos:
    $(r \rightarrow p) \wedge (\neg s \rightarrow q)$

Fórmulas Bem Formadas (*wff)*

- Fórmulas construídas mediante a combinação válida de símbolos
- Fórmulas Bem Formadas = *Well Formed Formula* = *wff*
- Para representar wff são usadas *meta-variáveis proposicionais* representadas pelas letras α, β, γ, etc
- Cada expressão envolvendo α, β, γ, etc é chamada de *forma sentencial*

Fórmulas Bem Formadas (wff)

1. um átomo é uma wff
2. se α e β são wff, então são também wff:

wff	lê-se
$\neg\alpha$	não α
$\alpha \wedge \beta$	α e β
$\alpha \vee \beta$	α ou β
$\alpha \rightarrow \beta$	se α então β
$\alpha \leftrightarrow \beta$	α se e somente se β

3. As únicas wff são definidas por (1) e (2)

Prioridade dos Conectivos

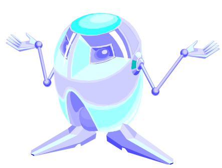
$\neg$

$\wedge$

$\vee$

$\rightarrow$

$\leftrightarrow$



Prioridade dos Conectivos

maior prioridade

menor prioridade

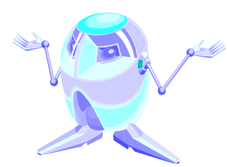
$\neg$

$\wedge$

$\vee$

$\rightarrow$

$\leftrightarrow$



Prioridade dos Conectivos

- Exemplos:
  - $\alpha \rightarrow \beta \vee \gamma$ significa $\alpha \rightarrow (\beta \vee \gamma)$
  - $\alpha \vee \beta \wedge \gamma$ significa $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$
  - $\alpha \rightarrow \beta \wedge \neg\gamma \vee \delta$ significa $\alpha \rightarrow ((\beta \wedge (\neg\gamma)) \vee \delta)$
- A precedência pode ser alterada pelo uso de parênteses

Variações de Notação

Item	Adotada	Outras		
e	$p\wedge q$	p&q	p.q	p,q
ou	$p\vee q$	p|q	p+q	p;q
não	$\neg p$	~p	$\bar{p}$	
condicional	$p\rightarrow q$	$p\Rightarrow q$	$p\supset q$	$q\leftarrow p$
bicondicional	$p\leftrightarrow q$	$p\Leftrightarrow q$		

Semântica do CP

- Consiste na interpretação de suas fórmulas, ou seja, atribuição dos valores-verdade (**v** ou **f**) às formulas atômicas, por exemplo:

$$(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$$

- Como a fórmula possui 2 componentes atômicos ela admite 2^2 interpretações
- Para uma fórmula de **n** componentes tem-se 2^n interpretações

Validade e Inconsistência

- Se uma fórmula β tem valor **v** numa interpretação I, então β é **verdadeira** na interpretação I
- Por exemplo, a fórmula $(p \wedge q)$ é verdadeira na interpretação I1

	p	q	$p \wedge q$
I1	v	v	v
I2	v	f	f
I3	f	v	f
I4	f	f	f

Validade e Inconsistência

- Se uma fórmula β é verdadeira segundo alguma interpretação, então β é **satisfatível** (ou consistente)
- Por exemplo, a fórmula $(p \wedge q)$ é satisfatível pois é verdadeira em uma interpretação (I1)

	p	q	$p \wedge q$
I1	v	v	v
I2	v	f	f
I3	f	v	f
I4	f	f	f

Validade e Inconsistência

- Uma fórmula β é **válida** (tautológica) quando for verdadeira em todas suas interpretações
- Por exemplo, a fórmula $(p \vee \neg p)$ é uma tautologia

	p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
I1	v	f	v
I2	f	v	v

Validade e Inconsistência

- Se uma fórmula β tem valor **f** numa interpretação I, então β é **falsa** na interpretação I
- Por exemplo, a fórmula $(p \wedge q)$ é falsa nas interpretações I2, I3 e I4

	p	q	$p \wedge q$
I1	v	v	v
I2	v	f	f
I3	f	v	f
I4	f	f	f

Validade e Inconsistência

- Uma fórmula β é **insatisfatível** (ou inconsistente ou contradição) quando for falsa segundo todas interpretações possíveis
- Por exemplo, a fórmula $(p \wedge \neg p)$ é insatisfatível

	p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
I1	v	f	f
I2	f	v	f

Validade e Inconsistência

- Uma fórmula β é **inválida** quando for falsa segundo alguma interpretação
- Por exemplo, a fórmula $(p \wedge q)$ é inválida pois é falsa nas interpretações I2, I3 e I4

	p	q	$p \wedge q$
I1	v	v	v
I2	v	f	f
I3	f	v	f
I4	f	f	f

Exercícios

- Provar usando tabela verdade que:

1. $(p \wedge \neg p)$ é inconsistente e portanto inválida.
2. $(p \vee \neg p)$ é válida e portanto consistente.
3. $(p \rightarrow \neg p)$ é inválida, ainda que consistente.

Conseqüência Lógica

- Sejam $\alpha, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ wff. Diz-se que α é **conseqüência lógica** de $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ se, e somente se, para qualquer interpretação em que $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ forem simultaneamente verdadeiras, α é também verdadeira.
- Se α é *conseqüência lógica* de $\beta_1, \beta_2, ... \beta_{n,}$, diz-se que α segue-se logicamente de $\beta_1, \beta_2, ... \beta_{n,}$.

Notação: $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n \models \alpha$

Conseqüência Lógica

- Teorema: α é conseqüência lógica de $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ se e somente se:
  - $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge ... \wedge \beta_n \rightarrow \alpha$ é uma tautologia
- Teorema: α é conseqüência lógica de $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ se e somente se:
  - $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge ... \wedge \beta_n \wedge \neg\alpha$ é uma contradição

Prova

- α é conseqüência lógica de $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ se e somente se $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge ... \wedge \beta_n \rightarrow \alpha$ é uma tautologia
- Condição Necessária
  - Seja α conseqüência lógica de $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ e I uma interpretação qualquer

    (1) Se $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ forem verdade em I então α também será verdade em I (pois é conseqüência lógica dos β_i's)

    (2) Se um dos β_i's for falso em I $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge ... \wedge \beta_n$ vtambém será falso em I. Independente do valor de α, $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge ... \wedge \beta_n \rightarrow \alpha$ é verdade
  - De (1) e (2) tem-se que $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge ... \wedge \beta_n \rightarrow \alpha$ é verdade em qualquer situação (tautologia)
- Condição Suficiente
  - Do fato de $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge ... \wedge \beta_n \rightarrow \alpha$ ser uma tautologia, tem-se que $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge ... \wedge \beta_n \rightarrow \alpha$ é verdade em qualquer interpretação. Se $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge ... \wedge \beta_n$ for verdade em I, α também será verdade em I. Portanto α é conseqüência lógica de $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$

Prova

- α é conseqüência lógica de $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ se e somente se $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge ... \wedge \beta_n \wedge \neg\alpha$ é uma contradição
- Do teorema anterior, sabe que α é conseqüência lógica de $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ se e somente se $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge ... \wedge \beta_n \rightarrow \alpha$ é uma tautologia
- Equivalentemente α é conseqüência lógica de $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ se e somente se $\neg(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge ... \wedge \beta_n \rightarrow \alpha)$ é contradição
  - $\neg(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge ... \wedge \beta_n \rightarrow \alpha) \equiv$
  - $\neg(\neg(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge ... \wedge \beta_n) \vee \alpha) \equiv$
  - $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge ... \wedge \beta_n \wedge \neg\alpha$
- Assim, $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge ... \wedge \beta_n \wedge \neg\alpha$ é uma contradição

Equivalência Lógica

- Uma fórmula α é logicamente equivalente ($\equiv$) a uma fórmula β quando α for conseqüência lógica de β e β for conseqüência lógica de α
- Assim, $\alpha \equiv \beta$ se e somente se $\alpha \leftrightarrow \beta$ é uma tautologia

Exemplo

- Provar que $(p \to q)$ é equivalente a $(\neg p \vee q)$

p	q	$p \to q$	$\neg p \vee q$	$(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
v	v	v	v	v
v	f	f	f	v
f	v	v	v	v
f	f	v	v	v

- Portanto, $(p \to q) \equiv (\neg p \vee q)$

Argumento

- Argumento é uma sequência $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ ($n \geq 1$) de proposições, onde:
  - α_i ($1 \leq i \leq n-1$) são chamadas **premissas** e
  - α_n denomina-se **conclusão**
- Notação:

$$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1} \vdash \alpha_n.$$

Argumento Válido

- Um argumento $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1} \vdash \alpha_n$ é **válido** se e somente se:

$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge ... \wedge \alpha_{n-1} \to \alpha_n$ for uma tautologia

ou equivalentemente,

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge ... \wedge \alpha_{n-1} \models \alpha_n$$

Argumento Válido

- Um argumento **válido** ($\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1} \models \alpha_n$) pode ser lido como:
  - $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1}$ acarretam α_n ou
  - α_n decorre de $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1}$ ou
  - α_n é conseqüência lógica de $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1}$
- Para *n*=1, o argumento é válido se e somente se α_1 for tautológica

Princípio da Substituição

- Subfórmulas: dada a fórmula α
  - α: $(p \to q) \leftrightarrow r$, então
  - $p \to q$, p, q, r, são as **subfórmulas** de α
- O princípio afirma que uma subfórmula de uma fórmula α, ou toda a fórmula α, pode ser substituída por uma fórmula equivalente e que a fórmula resultante é equivalente a α

Princípio da Substituição

- Exemplo: pelo princípio da substituição, a fórmula

$$\alpha: (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

é equivalente a:

$$\Upsilon: (\neg p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow r)$$

Propriedades

- Existem várias propriedades da negação, conjunção e disjunção
- Estas propriedades podem ser verificadas como equivalências lógicas
- Para demonstrar cada uma, basta utilizar as tabelas-verdade, constatando a tautologia

Propriedades

- Propriedades da Conjunção
  - comutativa
    $\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$
  - associativa
    $\alpha \wedge (\beta \wedge \Upsilon) \equiv (\alpha \wedge \beta) \wedge \Upsilon$
  - idempotente
    $\alpha \wedge \alpha \equiv \alpha$
  - propriedade de (**v**)erdade
    $\alpha \wedge \mathbf{v} \equiv \alpha$
  - propriedade de (**f**)also
    $\alpha \wedge \mathbf{f} \equiv \mathbf{f}$
- Propriedades da Disjunção
  - comutativa
    $\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$
  - associativa
    $\alpha \vee (\beta \vee \Upsilon) \equiv (\alpha \vee \beta) \vee \Upsilon$
  - idempotente
    $\alpha \vee \alpha \equiv \alpha$
  - propriedade de (**v**)erdade
    $\alpha \vee \mathbf{v} \equiv \mathbf{v}$
  - propriedade de (**f**)also
    $\alpha \vee \mathbf{f} \equiv \alpha$

Propriedades

- Distributiva
  - $\alpha \wedge (\beta \vee \Upsilon) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \Upsilon)$
  - $\alpha \vee (\beta \wedge \Upsilon) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \Upsilon)$
- Negação
  - $\neg(\neg\alpha) \equiv \alpha$
- Absorção
  - $\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \equiv \alpha$
  - $\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \equiv \alpha$
- De Morgan
  - $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$
  - $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$
- Equivalência da Implicação
  - $\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$

Fórmulas Proposicionais Equivalentes

Nome da Regra	Regra
modus ponens	$\alpha, \alpha \rightarrow \beta \models \beta$
modus tollens	$\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta \models \neg\alpha$
silogismo hipotético ou regra da cadeia	$\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma \models \alpha \rightarrow \gamma$
silogismo disjuntivo	$\alpha \vee \beta, \neg\alpha \models \beta$
dilema construtivo	$\alpha \rightarrow \beta, \gamma \rightarrow \delta, \alpha \vee \gamma \models \beta \vee \delta$
dilema destrutivo	$\alpha \rightarrow \beta, \gamma \rightarrow \delta, \neg\beta \vee \neg\gamma \models \neg\alpha \vee \neg\gamma$
simplificação	$\alpha \wedge \beta \models \alpha$
conjunção	$\alpha, \beta \models \alpha \wedge \beta$
adição	$\alpha \models \alpha \vee \beta$
contraposição	$\alpha \rightarrow \beta \models \neg\beta \rightarrow \neg\alpha$
exportação	$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \models (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma$
importação	$(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma \models \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$

Fórmulas Proposicionais Equivalentes

- Exemplo da forma de leitura *modus ponens*:

$$\alpha, \alpha \rightarrow \beta \models \beta$$

caso	α	seja verdade
e	$\alpha \rightarrow \beta$	seja verdade,
obrigatoriamente	β	será verdade

Verificação de Validade de Argumentos

- Sejam $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \beta$ fórmulas do Cálculo Proposicional. Uma seqüência finita de proposições $C_1, C_2, ..., C_k$ é uma *prova* ou *dedução* de β, a partir das premissas $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ se e somente se:
  - cada C_i é uma premissa α_j (1 <= j <= n), ou
  - C_i provém das fórmulas precedentes, pelo uso de um argumento válido das regras de inferência, ou
  - C_i provém do uso do princípio de substituição numa fórmula anterior, ou
  - C_k é β
- Diz-se então que β é dedutível de $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ ou que β é um **teorema**

Exemplo

Se as uvas caem, então a raposa as come.

Se a raposa as come, então estão maduras.

As uvas estão verdes ou caem.

Logo,

A raposa come as uvas se e só se as uvas caem.

Exemplo

α_1: Se as uvas caem, então a raposa as come.

α_2: Se a raposa as come, então estão maduras.

α_3: As uvas estão verdes ou caem.

Logo,

β: A raposa come as uvas se e só se as uvas caem.

Exemplo

α_1: Se as uvas caem, então a raposa as come.

α_2: Se a raposa as come, então estão maduras.

α_3: As uvas estão verdes ou caem.

Logo,

β: A raposa come as uvas se e só se as uvas caem.

Proposições:
p: as uvas caem
q: a raposa come as uvas
r: as uvas estão maduras
($\neg$r: as uvas estão verdes)

Exemplo

α_1: Se as uvas caem, então a raposa as come.

α_2: Se a raposa as come, então estão maduras.

α_3: As uvas estão verdes ou caem.

Logo,

β: A raposa come as uvas se e só se as uvas caem.

Proposições:
p: as uvas caem
q: a raposa come as uvas
r: as uvas estão maduras
($\neg$r: as uvas estão verdes)

Premissas	
α_1:	$p \to q$
α_2:	$q \to r$
α_3:	$\neg r \lor p$

Conclusão	
β:	$p \leftrightarrow q$

Provar que:
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \models \beta$
$p \to q, q \to r, \neg r \lor p \models p \leftrightarrow q$

Exemplo

α_1: Se as uvas caem, então a raposa as come.

α_2: Se a raposa as come, então estão maduras.

α_3: As uvas estão verdes ou caem.

Logo,

β: A raposa come as uvas se e só se as uvas caem.

Proposições:
p: as uvas caem
q: a raposa come as uvas
r: as uvas estão maduras
($\neg$r: as uvas estão verdes)

Premissas	
α_1:	$p \to q$
α_2:	$q \to r$
α_3:	$\neg r \lor p$

Conclusão	
β:	$p \leftrightarrow q$

Provar que:
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \models \beta$
$p \to q, q \to r, \neg r \lor p \models p \leftrightarrow q$

Deduz-se que:		
C_1:	$r \to p$	(α_3: equivalência)
C_2:	$q \to p$	(α_2 + C_1: regra da cadeia)
C_3:	$(p \to q) \land (q \to p)$	(α_1 + C_2: conjunção)
$C_4(\equiv\beta)$:	$p \leftrightarrow q$	(C_3: equivalência)

Cuidado!

- Sejam dois números *a* e *b* tais que *a* = *b*
  - Considere a seguinte prova
  - Por quê foi possível chegar a esse resultado?

i)	*a*	=	*b*	
ii)	*aa*	=	*ba*	multiplicar por *a*
iii)	$a^2 - b^2$	=	$ba - b^2$	subtrair b^2
iv)	(*a* + *b*)(*a* - *b*)	=	b(a - b)	fatorar
v)	[(*a* + *b*)(*a* - *b*)] / (*a* -*b*)	=	[*b*(*a* - *b*)] / (*a* - *b*)	dividir por (*a* - *b*)
vi)	*a* + *b*	=	*b*	
vii)	*a* + *a*	=	*a*	substituir *b* por *a* (*a* = *b*)
viii)	2*a*	=	*a*	dividir por *a*
ix)	2	=	1	

Formas Normais

- Há várias maneiras de escrever uma mesma fórmula
  - Ex: $(p \to q) \wedge m \equiv (\neg p \vee q) \wedge m$
- A Forma Normal é usada para uniformizar a notação
  - Forma Normal Disjuntiva (FND)
  - Forma Normal Conjuntiva (FNC)
- Um enunciado do Cálculo Proposicional sempre pode ser escrito na FN

Forma Normal Disjuntiva

- Uma fórmula proposicional α está na FND quando
  - α é uma *disjunção* $\beta_1 \vee \beta_2 \vee \dots \vee \beta_n$, $(n \geq 1)$
  - cada β_i $(1 \leq i \leq n)$ é uma *conjunção* de literais, ou um literal, ou seja:
    - β_i é da forma $p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \dots \wedge p_m$, $(m \geq 1)$

Forma Normal Disjuntiva

- A fórmula α está na FND se e somente se:
  - contém como conectivos apenas $\vee$, $\wedge$, $\neg$
  - $\neg$ só opera sobre proposições atômicas (não tem alcance sobre $\vee$, $\wedge$)
  - não aparecem negações sucessivas $(\neg\,\neg)$
  - $\wedge$ não tem alcance sobre $\vee$, ou seja, não existe expressão do tipo: $p \wedge (q \vee r)$

Forma Normal Disjuntiva

- Forma geral
  - $(p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \dots \wedge p_k) \vee (q_1 \wedge q_2 \dots \wedge \neg q_l) \vee (r_1 \wedge r_2 \wedge r_3 \wedge \dots \wedge r_s) \vee \dots$
- Exemplo
  - α: $\neg p \vee q \to r$
  - FND(α): $(p \wedge \neg q) \vee r$
- Obtenção da FND: por tabela verdade ou por equivalência

Forma Normal Conjuntiva

- Uma fórmula proposicional α está na FNC quando:
  - α é uma *conjunção* $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \dots \wedge \beta_n$, $(n \geq 1)$
  - cada β_i $(1 \leq i \leq n)$ é uma *disjunção* de literais, ou um literal, ou seja:
    - β_i é da forma $p_1 \vee \neg p_2 \vee \dots p_m$, $(m \geq 1)$

Forma Normal Conjuntiva

- A fórmula α está na FNC se e somente se:
  - contém como conectivos apenas $\vee$, $\wedge$, $\neg$
  - $\neg$ só opera sobre proposições atômicas (não tem alcance sobre $\vee$ e $\wedge$)
  - não aparecem negações sucessivas ($\neg\neg$)
  - $\vee$ não tem alcance sobre $\wedge$, ou seja, não existe expressão do tipo: $p \vee (q \wedge r)$

Forma Normal Conjuntiva

- Forma geral
  - $(p_1 \vee \neg p_2 \vee \ldots \vee p_k) \wedge (q_1 \vee q_2 \ldots \vee \neg q_l) \wedge (r_1 \vee r_2 \vee r_3 \vee \ldots \vee r_s) \wedge \ldots$
- Exemplo
  - α: $\neg p \vee q \to r$
  - FNC(α): $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r)$
- É fácil mostrar que uma FNC é tautológica se e somente se cada elemento da conjunção é tautológico
- Obtenção da FNC: por tabela verdade ou por equivalência

Obtenção da FNC por Tabela Verdade

- Exemplo: $\neg p \vee q \to r$

	p	q	r	$\neg$p	$\neg$p$\vee$q	($\neg$p$\vee$q)$\to$r	
I1	v	v	v	f	v	v	
I2	v	v	f	f	v	f	$\Leftarrow$
I3	v	f	v	f	f	v	
I4	v	f	f	f	f	v	
I5	f	v	v	v	v	v	
I6	f	v	f	v	v	f	$\Leftarrow$
I7	f	f	v	v	v	v	
I8	f	f	f	v	v	f	$\Leftarrow$

Obtenção da FNC por Tabela Verdade

- Exemplo: $\neg p \vee q \to r$

	p	q	r	$\neg$p	$\neg$p$\vee$q	($\neg$p$\vee$q)$\to$r	
I2	v	v	f	f	v	f	$(\neg p \vee \neg q \vee r)$
I6	f	v	f	v	v	f	$(p \vee \neg q \vee r)$
I8	f	f	f	v	v	f	$(p \vee q \vee r)$

- Para cada interpretação **falsa** da Tabela Verdade:
  - Átomo que assume valor v é alterado pela sua negação
  - Átomo que assume valor f é deixado intacto
  - Literais de uma mesma interpretação são conectados por $\vee$
  - As interpretações são conectadas por $\wedge$
- No exemplo
  - FNC($\neg p \vee q \to r$): $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r)$

Obtenção da FNC por Equivalência

1. Repetidamente, usar as equivalências, para eliminar os conectivos lógicos $\leftrightarrow$ e $\to$:
   - $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \alpha)$
   - $\alpha \to \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$
2. Repetidamente, eliminar as negações, utilizando:
   - $\neg(\neg\alpha) \equiv \alpha$
   - $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$
   - $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \neg\beta)$
3. Repetidamente, aplicar a lei distributiva:
   - $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$
   - $(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \equiv (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma)$

Exercício

- Obter a FNC das fórmulas:
  - a) $(p \wedge q) \to (\neg p \wedge r)$
  - b) $(p \wedge q) \to (p \wedge r)$
- i) Usando equivalência
- ii) Usando tabela verdade

Solução (Equivalência)

- $(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \wedge r)$
  - $\neg(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$
  - $(\neg p \vee \neg q) \vee (\neg p \wedge r)$
  - $(\neg p \vee \neg q \vee \neg p) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$
  - $(\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$
  - FNC($(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \wedge r)$): $(\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$
- $(p \wedge q) \rightarrow (p \wedge r)$
  - $\neg(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
  - $(\neg p \vee \neg q) \vee (p \wedge r)$
  - $(\neg p \vee \neg q \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$
  - $(\neg p \vee \neg q \vee r)$
  - FNC($(p \wedge q) \rightarrow (p \wedge r)$): $(\neg p \vee \neg q \vee r)$

Solução (Tabela Verdade)

p	q	r	¬p	p∧q	p∧r	¬p∧r	(p∧q)→(¬p∧r)	(p∧q)→(p∧r)
v	v	v	f	v	v	f	f	v
v	v	f	f	v	f	f	f	f
v	f	v	f	f	v	f	v	v
v	f	f	f	f	f	f	v	v
f	v	v	v	f	f	v	v	v
f	v	f	v	f	f	f	v	v
f	f	v	v	f	f	v	v	v
f	f	f	v	f	f	f	v	v

- FNC($(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \wedge r)$): $(\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$
- FNC($(p \wedge q) \rightarrow (p \wedge r)$): $(\neg p \vee \neg q \vee r)$

Notação Clausal

- Cláusula: disjunção de literais:

$$F_i = L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_r$$

- Fórmula na FNC: escrita como conjunção de cláusulas:

$$F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n$$

- A FNC é uma coleção de cláusulas, porque a conjunção $\wedge$ tem propriedade associativa. Por isso, pode-se escrever uma fórmula α na forma:

$$\{F_1, F_2, \ldots F_n\} \equiv F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n$$

- A disjunção também tem a propriedade associativa, e por isso, também podemos escrever uma cláusula F_i na forma:

$$F_i = \{L_1, L_2, \ldots, L_n\} \equiv L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_n$$

Notação Clausal

- Exemplo
  - FNC($((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \rightarrow s$):
    - $((s \vee \neg q \vee p) \wedge (s \vee \neg p \vee \neg r) \wedge (s \vee \neg q \vee \neg r))$
- Pode-se escrever:
  - FNC($((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \rightarrow s$): $F_1 \wedge F_2 \wedge F_3$
- onde
  - F_1: $(s \vee \neg q \vee p)$, F_2: $(s \vee \neg p \vee \neg r)$, F_3: $(s \vee \neg q \vee \neg r)$
  - que pode ser representado por $F = \{F_1, F_2, F_3\}$, onde a conjunção está implícita

Notação Clausal

- É uma convenção escrever uma fórmula após a outra, lembrando que estão conectadas por $\wedge$
  - F_1: $(s \vee \neg q \vee p)$
  - F_2: $(s \vee \neg p \vee \neg r)$
  - F_3: $(s \vee \neg q \vee \neg r)$
- Colocando os literais positivos antes dos negativos
  - F_1: $(s \vee p \vee \neg q)$
  - F_2: $(s \vee \neg p \vee \neg r)$
  - F_3: $(s \vee \neg q \vee \neg r)$

Notação de Kowalsky

- A separação de literais positivos e negativos prepara a cláusula para a notação definida por Kowalsky:

FNC	FNC Kowalsky	CP
F_1: $s \vee p \vee \neg q$	F_1: $s, p \leftarrow q$	F_1: $q \rightarrow s \vee p$
F_2: $s \vee \neg p \vee \neg r$	F_2: $s \leftarrow p, r$	F_2: $p \wedge r \rightarrow s$
F_3: $s \vee \neg q \vee \neg r$	F_3: $s \leftarrow q, r$	F_3: $q \wedge r \rightarrow s$

- Observar que todas as notações são equivalentes

Notação de Kowalsky

- Há uma disjunção ($\vee$) implícita à esquerda de $\leftarrow$, chamada de *conclusão(ões)*

F_1: s, p $\leftarrow$ q
F_2: s $\leftarrow$ p, r
F_3: s $\leftarrow$ q, r

- Há uma conjunção ($\wedge$) implícita à direita de $\leftarrow$, chamada de *premissa(s)* ou *condição(ões)*

Notação de Kowalsky

- São equivalentes as seguintes notações:

(1) $B_1, B_2, ..., B_n \rightarrow A_1, A_2, ..., A_m$
(2) $A_1, A_2, ..., A_m \leftarrow B_1, B_2, ..., B_n$
(3) $A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_m \leftarrow B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_n$
(4) $A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_m \vee \neg(B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_n)$
(5) $A_1 \vee A_2 \vee ... A_m \vee \neg B_1 \vee \neg B_2 \vee ... \vee \neg B_n$

- A cláusula (2) é uma cláusula genérica na notação de Kowalsky

Cláusulas de Horn

Dependendo do número de literais, tem-se:

1. Se m>1, as conclusões são indefinidas, ou seja, há várias conclusões
2. Se m≤1, tem-se as **Cláusulas de Horn**
   - m=1 e n > 0, ($A \leftarrow B_1, B_2, ..., B_n$) chamada cláusula definida, onde só existe uma solução
   - m=1 e n=0, ($A \leftarrow$) é a cláusula indefinida incondicional, ou fato. Neste caso, o símbolo $\leftarrow$ é abandonado
   - m=0 e n>0, ($\leftarrow B_1, B_2, ..., B_n$) é a negação pura de $B_1, B_2, ..., B_n$
   - m=0 e n=0, ($\leftarrow$) é a cláusula vazia, denotada por []

Cláusulas de Horn

- Kowalski mostrou que uma cláusula de Horn do tipo
  - $A \leftarrow B_1, B_2, ..., B_n$
  - pode ser executada numa linguagem de programação recursiva, onde A é a cabeça do procedimento e os B_i's o seu corpo
- $A \leftarrow B_1, B_2, ..., B_n$ pode ser lido como:
  - para resolver (executar) A, resolva (execute) B_1 e B_2 e ... e B_n

Cláusulas de Horn

- Em Prolog
- $A \leftarrow B_1, B_2, ..., B_n$ é representado como
  - A **:-** $B_1, B_2, ..., B_n$**.**
  - **:-** é chamado *neck*
- Pode-se ler A **:-** $B_1, B_2, ..., B_n$**.** da seguinte forma
  - A é verdade se B_1 é verdade e B_2 é verdade e ... e B_n é verdade

Cláusulas de Horn

- As únicas cláusulas que podem ser representadas em Prolog são as Cláusulas de Horn
- Se um determinado conhecimento puder ser expresso mediante o cálculo proposicional, somente a parte formada por cláusulas de Horn poderá ser representada em Prolog
  - Ou seja, um sub-conjunto do cálculo proposicional

Exercício

- Mostre que as fórmulas seguintes são equivalentes:

(i) $b_1, b_2, b_3, b_4 \rightarrow a_1, a_2, a_3$

(ii) $a_1, a_2, a_3 \leftarrow b_1, b_2, b_3, b_4$

(iii) $a_1 \vee a_2 \vee a_3 \leftarrow b_1 \wedge b_2 \wedge b_3 \wedge b_4$

(iv) $a_1 \vee a_2 \vee a_3 \vee \neg(b_1 \wedge b_2 \wedge b_3 \wedge b_4)$

(v) $a_1 \vee a_2 \vee a_3 \vee \neg b_1 \vee \neg b_2 \vee \neg b_3 \vee \neg b_4$

Prova por Resolução

- O método da Resolução utiliza uma fórmula na FNC para realizar inferências
- O método da Resolução é facilmente automatizado para ser realizado por um computador
- É um método de resolução geral, que emprega apenas uma regra de inferência
- Podem ser aplicadas a wwf que consistem de uma disjunção de literais: as cláusulas
- O processo de resolução é aplicado a um par de cláusulas e resulta em uma cláusula derivada

Prova por Resolução

- Pré-requisito: 2 cláusulas pais
  - um literal p em uma das cláusulas pai (P1)
  - um literal ¬p na outra cláusula pai (P2)
  - nova cláusula é chamada resolvente (R) contendo todos os literais de P1 e P2, exceto p
- P1: p **ou** mais-literais
- P2: ¬p **ou** ainda-mais-literais
- R: mais-literais **ou** ainda-mais-literais

Prova por Resolução

- Regra de Resolução:

de	$p \vee \cancel{q}$
e	$r \vee \cancel{\neg q}$
deduz-se	$p \vee r$

- Esta regra permite combinar duas fórmulas por meio da eliminação de átomos complementares
- No exemplo, eliminou-se os átomos q e ¬q

Prova por Resolução

- Regra de Resolução:

de	$p \vee \cancel{q}$	cláusulas pais
e	$r \vee \cancel{\neg q}$	
deduz-se	$p \vee r$	

- Esta regra permite combinar duas fórmulas por meio da eliminação de átomos complementares
- No exemplo, eliminou-se os átomos q e ¬q

Prova por Resolução

- Regra de Resolução:

de	$p \vee \cancel{q}$	
e	$r \vee \cancel{\neg q}$	
deduz-se	$p \vee r$	cláusula resolvente

- Esta regra permite combinar duas fórmulas por meio da eliminação de átomos complementares
- No exemplo, eliminou-se os átomos q e ¬q

Exercício 1

- Qual a cláusula resolvente das seguintes cláusulas pais?
  - P1) $(p \vee s \vee \neg q)$
  - P2) $(p \vee q \vee \neg r)$

Solução Exercício 1

- Qual a cláusula resolvente das seguintes cláusulas pais?
  - P1) $(p \vee s \vee \neg q)$
  - P2) $(p \vee q \vee \neg r)$
  - R) $(p \vee s \vee \neg r)$

Exercício 2

- Qual a cláusula resolvente das seguintes cláusulas pais?
  - P1) $(\neg p \vee s \vee \neg q)$
  - P2) $(p \vee q \vee \neg r)$

Solução Exercício 2

- Qual a cláusula resolvente das seguintes cláusulas pais?
  - P1) $(\neg p \vee s \vee \neg q)$
  - P2) $(p \vee q \vee \neg r)$
  - R) $(\neg p \vee s \vee p \vee \neg r) \equiv$ **v**

Procedimento da Resolução

- Usa-se redução ao absurdo, negando a conclusão:

1. Achar, para cada premissa e para cada conclusão negada (adotada como premissa), a FNC correspondente, da seguinte maneira:
   - Remover $\leftrightarrow$ e $\rightarrow$:
     - $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \alpha)$
     - $\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$
   - Aplicar De Morgan:
     - $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$
     - $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$
   - Usar distributiva
     - $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$

Procedimento da Resolução

2. Cada premissa é agora uma conjunção de uma ou mais cláusulas em uma linha diferente (cada uma delas é **v**, uma vez que a conjunção de todas é **v**)
3. Cada cláusula contém uma disjunção de um ou mais literais; estão na forma correta para se aplicar a resolução. Procurar então por duas cláusulas que contenham o mesmo átomo, com sinais opostos, por exemplo, uma cláusula com p e outra cláusula contendo ¬p, eliminando ambos

Procedimento da Resolução

4. Continuar este processo até que se tenha derivado p e ¬p. Ao se aplicar resolução nestas duas cláusulas, obtém-se a cláusula vazia, denotada por □, o que expressa a contradição, completando então o método de redução ao absurdo:

   p, ¬p deduz-se falso

   Pode-se também usar a resolução mediante a negação do teorema. Neste caso aplicam-se os mesmos passos anteriores

Exemplos do Uso de Resolução

- A seguir são mostrados dois exemplos usando prova por redução ao absurdo
  - Por meio da negação da tese
  - Por meio da negação do teorema

Negação da Tese

- Para provar que $r \vee s$

  é conseqüência lógica de $p \vee q$, $p \to r$, $q \to s$
  - deve-se mostrar que $((p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to s)) \to (r \vee s)$ é uma tautologia (teorema)

Negação da Tese

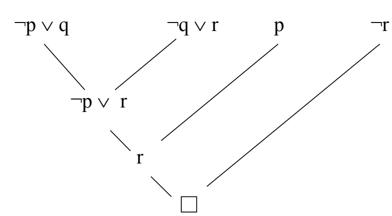
- Converter premissas para FNC, escrevendo em linhas separadas:
  - (a) $p \vee q$
  - (b) $\neg p \vee r$
  - (c) $\neg q \vee s$
- Negar a conclusão e convertê-la para FNC: $\neg(r \vee s) \equiv \neg r \wedge \neg s$
  - (d) $\neg r$
  - (e) $\neg s$
- Deduzir a cláusula vazia por resolução
  - (f) $\neg p$ de (d) e (b)
  - (g) q de (f) e (a)
  - (h) $\neg q$ de (e) e (c)
  - (i) □ de (g) e (h)
- a cláusula □ é gerada pela contradição de duas cláusulas na forma: $q \wedge \neg q$

Negação do Teorema

- Para provar a regra da cadeia:
  - $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$
- A negação do teorema é:
  - $\neg((p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r))$
- A FNC do teorema negado é:
  - $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge p \wedge \neg r$

Negação do Teorema

- O passo básico do método de resolução ocorre quando existem duas cláusulas tais que uma proposição p ocorre em uma delas e ¬p ocorre na outra



Resolução: Vantagens

- Não é necessário o uso de equivalências para rearranjar $p \vee q$ como $q \vee p$
  - Tudo é colocado na FNC antes da aplicação do método
  - Para o método, a posição (na cláusula) do átomo a ser eliminado é indiferente
- Existe apenas uma regra de inferência para ser lembrada
- Fácil de ser mecanizado
- Linguagem Prolog está baseada no princípio da resolução aplicado a cláusulas de Horn
  - Usando Busca em Profundidade

Propriedades do CP

- Embora seja insuficiente para o formalismo do raciocínio lógico, o CP possui propriedades muito importantes:
  - O sistema é *consistente:*
    - Não é possível derivar simultaneamente uma fórmula α e sua negação $\neg\alpha$
  - O sistema é *correto* ou *coerente:*
    - Todo teorema é uma tautologia
  - Completude
    - Toda tautologia é um teorema
  - Decidibilidade
    - Há um algoritmo que permite verificar se uma dada fórmula do sistema é ou não um teorema

Exercício

- Aplique resolução a cada situação seguinte e verifique o que pode ser inferido

a) Sócrates é homem. Se Sócrates é homem então ele é mortal.

b) $s \wedge (r \leftarrow s)$

Slides baseados em:

Monard, M.C., Nicoletti, M.C., Noguchi.R.H.,
O Cálculo Proposicional: Uma abordagem voltada à compreensão da linguagem Prolog,
Notas Didáticas do ICMC-USP, 1992
(http://labic.icmc.usp.br/didatico/pdf/Cproposicional_pdf.zip)

Material elaborado por
José Augusto Baranauskas
Revisão 2007