

## Indução de Regras

- A indução de árvores de decisão recursivamente divide os exemplos em subconjuntos menores, tentando separar cada classe das demais
- A indução de regras, por outro lado, o faz diretamente, usando um algoritmo de cobertura
- Nesse processo, cada regra cobre um subconjunto de exemplos que pertencem a uma classe específica
- Veremos nesta aula duas formas de indução de regras: regras ordenadas e não ordenadas

José Augusto Baranauskas  
 Departamento de Física e Matemática – FFCLRP-USP  
 augusto@usp.br  
 http://dfm.ffclrp.usp.br/~augusto

## Regra

- Uma regra assume a forma **if L then R** que é equivalente a  $L \rightarrow R \equiv R \leftarrow L \equiv R :- L$
- Normalmente, as partes esquerda L e direita R são complexos sem atributos comuns entre eles, ou seja
  - $\text{atributos}(L) \cap \text{atributos}(R) = \emptyset$
- A parte esquerda L é denominada **condição, premissa, antecedente, cauda** ou **corpo** da regra
- A parte direita R é denominada **conclusão** ou **cabeça** da regra

## Regra de Classificação

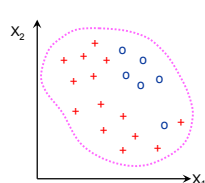
- Uma regra de classificação assume a forma restrita de uma regra
  - **if L then classe =  $C_i$**
- ou simplesmente
  - **if L then  $C_i$**
- onde  $C_i$  pertence ao conjunto de k valores de classe  $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$
- A parte esquerda L é um complexo

## Complexo

- É uma conjunção de disjunções dos atributos de teste, na forma:
 
$$X_i \text{ op valor}$$
 onde  $X_i$  é um atributo, *op* é um operador e valor é constante válida para o atributo  $X_i$
- Exemplos
  - Sexo = Masculino
  - Idade  $\geq$  20
  - Sexo = Feminino and Idade  $<$  90

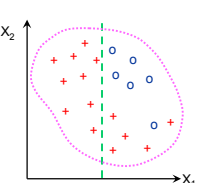
## Indução de Regras

- Na indução de regras, o algoritmo identifica novos testes (condições) a serem adicionados à regra atual (sendo induzida) de forma a melhorar a precisão
- Exemplo
  - Considere um conjunto com duas classes (+, o) e dois atributos  $X_1$  e  $X_2$  conforme figura ao lado



## Indução de Regras

- Na indução de regras, o algoritmo identifica novos testes (condições) a serem adicionados à regra atual (sendo induzida) de forma a melhorar a precisão
- Exemplo
  - Passo 1:
    - **if  $X_1 > 1.2$  then classe = o**

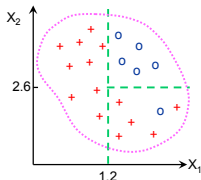


## Indução de Regras

- Na indução de regras, o algoritmo identifica novos testes (condições) a serem adicionados à regra atual (sendo induzida) de forma a melhorar a precisão

### Exemplo

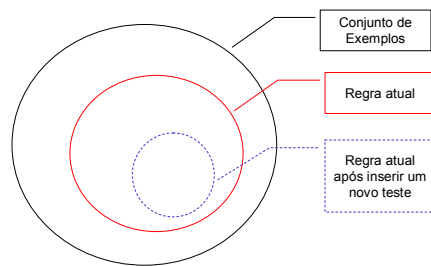
- Passo 1:  
if  $X_1 > 1.2$  then classe=0
- Passo 2: (especialização)  
if  $X_1 > 1.2$  and  $X_2 > 2.6$  then classe=0



7

## Indução de Regras

### Algoritmo de Cobertura



8

## Indução de Regras

### Especialização

- Etapas em que testes são incluídos na regra sendo induzida
- Objetivo: eliminar exemplos cobertos incorretamente

### Generalização (Poda)

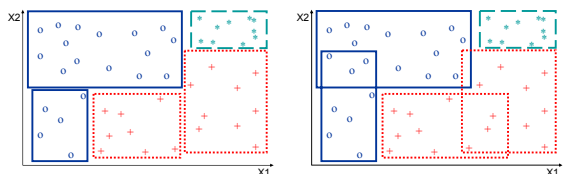
- Etapas em que testes são excluídos de uma regra
  - pré-poda: se ocorre durante a indução
  - pós-poda: se ocorre após a indução de todas as regras
- Objetivo: evitar *overfitting*

9

## Classificação de Regras

### Quanto à intersecção:

- Regras disjuntas: cada exemplo é coberto somente por uma única regra
- Regras não-disjuntas: cada exemplo pode ser coberto por mais de uma regra



10

## Classificação de Regras

### Quanto à ordem de avaliação:

- Regras ordenadas: a ordem de aplicação das regras é importante
- Regras não-ordenadas: a ordem de aplicação das regras é indiferente
- Regras semi-ordenadas: não há ordem entre regras de uma mesma classe (*i.e.* cuja conclusão é de uma mesma classe), mas a ordem entre regras de classes diferentes deve ser respeitada

### Quanto ao critério de avaliação:

- A primeira regra que dispara para um novo exemplo é usada para classificá-lo
- Todas as regras que disparam para um novo exemplo são usadas para classificá-lo

11

## Estratégias para Indução de Regras

### Induzir uma árvore de decisão

- Transformar a árvore em um conjunto (disjunto) de regras
- Transformar a árvore em um conjunto de regras, simplificando algumas de suas condições (conjunto não-disjunto) C4.5rules, Part

### Induzir regras diretamente a partir dos exemplos

- 0R, 1R (regras simples)
- CN2, Ripper (JRip), Prism, etc

12

## 0R: Zero Rule

- ❑ Método simples, com baixo desempenho
- ❑ Útil como *benchmark*: se qualquer outro classificador tem desempenho pior do que 0R isto indica provavelmente *overfitting*
- ❑ Algoritmo:
  - Para classificação (rótulo classe discreto): utiliza a classe majoritária
  - Para regressão (rótulo classe contínuo): utiliza a média dos valores

13

## 1R: One Rule

- ❑ Classificador simples mas frequentemente efetivo, útil para seleção de atributos
- ❑ Corresponde a induzir uma árvore de decisão de um único nível
- ❑ Entre atributos equivalentes, escolhe aleatoriamente
- ❑ Usa valor desconhecido (*missing*) como um valor separado de atributo

14

## Algoritmo de Indução de Regras Ordenadas

```
Algoritmo RegrasOrdenadas (Exemplos)
ListaRegras := {}
repeat
  complexo := encontre_melhor_complexo (Exemplos)
  if complexo ≠ {} then
    C := classe_mais_frequente (complexo, Exemplos)
    Regra := if complexo then classe = C
    ListaRegras := ListaRegras + {Regra}
    Exemplos := Exemplos - {E : E ∈ Exemplos and
                          satisfaz (E, complexo)}
  endif
until Exemplos = {} or complexo = {}
return ListaRegras
```

15

## Algoritmo de Indução de Regras Ordenadas

- ❑ A indução ocorre de forma iterativa, cada iteração procurando por um complexo que cobre um grande número de exemplos da classe  $C_i$  e poucos exemplos da classe  $C_j$  ( $j \neq i$ )
- ❑ Ao encontrar um bom complexo, os exemplos cobertos (tanto os da classe  $C_i$  sendo aprendidos bem como poucos outros de classe  $C_j$ ,  $j \neq i$ , também cobertos pelo complexo) são removidos do conjunto de treinamento
- ❑ A regra "if complexo then classe= $C_i$ " é adicionada ao final da lista de regras
- ❑ Este processo prossegue até que nenhum complexo possa ser encontrado ou não restem exemplos no conjunto de treinamento

16

## Classificando Novos Exemplos

- ❑ Para classificar novos exemplos, cada regra é avaliada (em ordem) até que uma regra cuja condições sejam satisfeitas pelo novo exemplo sendo classificado
- ❑ A classe predita pela regra encontrada é então associada como sendo a classe do novo exemplo
- ❑ Se nenhuma regra for satisfeita pelo novo exemplo, a regra *default* atribui a classe mais comum dos exemplos de treinamento não cobertos por nenhuma regra como sendo a classe do novo exemplo
- ❑ A regra *default* somente é utilizada na classificação de novos exemplos se nenhuma das regras induzidas disparar para o novo exemplo sendo classificado

17

## Interpretação Geométrica

- ❑ Regras ordenadas podem ser vistas como árvores binárias degeneradas, uma vez que para classificar um novo exemplo, cada regra é avaliada em ordem até que uma dispare
- ❑ Como essa situação corresponde ao comando *if-then-else*, o espaço de descrição é particionado em regiões disjuntas, como no caso de árvores de decisão

18

## Exemplo

Exemplo	Aparência	Temperatura	Umidade	Ventando	Viajar
E <sub>1</sub>	sol	25	72	sim	bom
E <sub>2</sub>	sol	28	91	sim	ruim
E <sub>3</sub>	sol	22	70	não	bom
E <sub>4</sub>	sol	23	95	não	ruim
E <sub>5</sub>	sol	30	85	não	ruim
E <sub>6</sub>	nublado	23	90	sim	bom
E <sub>7</sub>	nublado	29	78	não	bom
E <sub>8</sub>	nublado	19	65	sim	ruim
E <sub>9</sub>	nublado	26	75	não	bom
E <sub>10</sub>	nublado	20	87	sim	bom
E <sub>11</sub>	chuva	22	95	não	bom
E <sub>12</sub>	chuva	19	70	sim	ruim
E <sub>13</sub>	chuva	23	80	sim	ruim
E <sub>14</sub>	chuva	25	81	não	bom
E <sub>15</sub>	chuva	21	80	não	bom

19

## Exemplo

Exemplo	Aparência	Temperatura	Umidade	Ventando	Viajar	R <sub>1</sub>
E <sub>1</sub>	sol	25	72	sim	bom	cc
E <sub>2</sub>	sol	28	91	sim	ruim	cc
E <sub>3</sub>	sol	22	70	não	bom	cc
E <sub>4</sub>	sol	23	95	não	ruim	cc
E <sub>5</sub>	sol	30	85	não	ruim	cc
E <sub>6</sub>	nublado	23	90	sim	bom	cc
E <sub>7</sub>	nublado	29	78	não	bom	cc
E <sub>8</sub>	nublado	19	65	sim	ruim	cc
E <sub>9</sub>	nublado	26	75	não	bom	cc
E <sub>10</sub>	nublado	20	87	sim	bom	cc
E <sub>11</sub>	chuva	22	95	não	bom	cc
E <sub>12</sub>	chuva	19	70	sim	ruim	cc
E <sub>13</sub>	chuva	23	80	sim	ruim	cc
E <sub>14</sub>	chuva	25	81	não	bom	cc
E <sub>15</sub>	chuva	21	80	não	bom	cc

cplx := umidade < 83 [6b,3r]

C := classe\_mais\_frequente(cplx, Exemplos) = bom

R<sub>1</sub> := if umidade < 83 then classe = bom

20

## Exemplo

- Considerando a indução da regra inicial R<sub>1</sub>, todos os exemplos que satisfazem suas condições e possuem a mesma classe predita pela conclusão da regra (E<sub>1</sub>, E<sub>3</sub>, E<sub>7</sub>, E<sub>9</sub>, E<sub>14</sub>, E<sub>15</sub>), ou seja, aqueles cobertos corretamente (cc) pela regra, assim como os exemplos que satisfazem as condições da regra mas não pertencem à classe predita (E<sub>8</sub>, E<sub>12</sub>, E<sub>13</sub>), ou seja, aqueles cobertos incorretamente (ci) são removidos pelo algoritmo de indução de regras ordenadas e um **else** é introduzido na lista de regras antes de induzir a próxima regra
- Assim, na indução da próxima regra apenas os exemplos E<sub>2</sub>, E<sub>4</sub>, E<sub>5</sub>, E<sub>6</sub>, E<sub>10</sub> e E<sub>11</sub> são considerados
- Esse processo se repete para as demais regras

21

## Exemplo

Exemplo	Aparência	Temperatura	Umidade	Ventando	Viajar	R <sub>1</sub>	R <sub>2</sub>
E <sub>1</sub>	sol	25	72	sim	bom	cc	cc
E <sub>2</sub>	sol	28	91	sim	ruim	cc	cc
E <sub>3</sub>	sol	22	70	não	bom	cc	cc
E <sub>4</sub>	sol	23	95	não	ruim	cc	cc
E <sub>5</sub>	sol	30	85	não	ruim	cc	cc
E <sub>6</sub>	nublado	23	90	sim	bom	cc	cc
E <sub>7</sub>	nublado	29	78	não	bom	cc	cc
E <sub>8</sub>	nublado	19	65	sim	ruim	cc	cc
E <sub>9</sub>	nublado	26	75	não	bom	cc	cc
E <sub>10</sub>	nublado	20	87	sim	bom	cc	cc
E <sub>11</sub>	chuva	22	95	não	bom	cc	cc
E <sub>12</sub>	chuva	19	70	sim	ruim	cc	cc
E <sub>13</sub>	chuva	23	80	sim	ruim	cc	cc
E <sub>14</sub>	chuva	25	81	não	bom	cc	cc
E <sub>15</sub>	chuva	21	80	não	bom	cc	cc

cplx := temperatura >= 23 [1b,3r]

C := classe\_mais\_frequente(cplx, Exemplos) = ruim

R<sub>2</sub> := if temperatura >= 23 then classe = ruim

22

## Exemplo

Exemplo	Aparência	Temperatura	Umidade	Ventando	Viajar	R <sub>1</sub>	R <sub>2</sub>	R <sub>3</sub>
E <sub>1</sub>	sol	25	72	sim	bom	cc		
E <sub>2</sub>	sol	28	91	sim	ruim	cc	cc	
E <sub>3</sub>	sol	22	70	não	bom	cc		
E <sub>4</sub>	sol	23	95	não	ruim	cc		
E <sub>5</sub>	sol	30	85	não	ruim	cc		
E <sub>6</sub>	nublado	23	90	sim	bom	cc		
E <sub>7</sub>	nublado	29	78	não	bom	cc		
E <sub>8</sub>	nublado	19	65	sim	ruim	cc		
E <sub>9</sub>	nublado	26	75	não	bom	cc		
E <sub>10</sub>	nublado	20	87	sim	bom	cc		
E <sub>11</sub>	chuva	22	95	não	bom	cc		cc
E <sub>12</sub>	chuva	19	70	sim	ruim	cc		
E <sub>13</sub>	chuva	23	80	sim	ruim	cc		
E <sub>14</sub>	chuva	25	81	não	bom	cc		
E <sub>15</sub>	chuva	21	80	não	bom	cc		

cplx := aparência = chuva [1b,0r]

C := classe\_mais\_frequente(cplx, Exemplos) = bom

R<sub>3</sub> := if aparência = chuva then classe = bom

23

## Exemplo

Exemplo	Aparência	Temperatura	Umidade	Ventando	Viajar	R <sub>1</sub>	R <sub>2</sub>	R <sub>3</sub>	R <sub>4</sub>
E <sub>1</sub>	sol	25	72	sim	bom	cc			
E <sub>2</sub>	sol	28	91	sim	ruim	cc	cc		
E <sub>3</sub>	sol	22	70	não	bom	cc			
E <sub>4</sub>	sol	23	95	não	ruim	cc			
E <sub>5</sub>	sol	30	85	não	ruim	cc			
E <sub>6</sub>	nublado	23	90	sim	bom	cc			
E <sub>7</sub>	nublado	29	78	não	bom	cc			
E <sub>8</sub>	nublado	19	65	sim	ruim	cc			
E <sub>9</sub>	nublado	26	75	não	bom	cc			
E <sub>10</sub>	nublado	20	87	sim	bom	cc			cc
E <sub>11</sub>	chuva	22	95	não	bom	cc		cc	
E <sub>12</sub>	chuva	19	70	sim	ruim	cc			
E <sub>13</sub>	chuva	23	80	sim	ruim	cc			
E <sub>14</sub>	chuva	25	81	não	bom	cc			
E <sub>15</sub>	chuva	21	80	não	bom	cc			

Quando todos os exemplos remanescentes são de uma mesma classe, ao invés de procurar por mais regras, o algoritmo pode criar a regra **default** que rotula os exemplos remanescentes não classificados

R<sub>4</sub> := classe = bom

24

## Exemplo

Lista Final de Regras Ordenadas	
R <sub>1</sub>	<b>if</b> umidade<83 <b>then</b> classe=bom
R <sub>2</sub>	<b>else if</b> temperatura >= 23 <b>then</b> classe=ruim
R <sub>3</sub>	<b>else if</b> aparência=chuva <b>then</b> classe=bom
R <sub>4</sub>	<b>else</b> classe=bom (regra <i>default</i> )

25

## Indução de Regras Não Ordenadas

- ❑ O algoritmo de regras ordenadas pode ser alterado para induzir regras não ordenadas
- ❑ A alteração principal consiste em iterar para cada classe C<sub>i</sub>, removendo apenas os exemplos cobertos e que são da classe C<sub>i</sub> (cobertos corretamente) quando uma regra é encontrada
- ❑ Assim, diferentemente de regras ordenadas, os exemplos das classes C<sub>i</sub>, j ≠ i cobertos incorretamente pelo **complexo** encontrado devem permanecer porque agora cada nova regra deve ser comparada com todos os exemplos cobertos incorretamente
- ❑ Exemplos cobertos (corretamente) que possuem a classe C<sub>i</sub> sendo aprendida devem ser removidos para evitar que o algoritmo encontre a mesma regra novamente

26

## Algoritmo de Indução de Regras Não Ordenadas

```
Algoritmo RegrasNãoOrdenadas(Exemplos)
ConjuntoRegras := {}
TodosExemplos := Exemplos
for cada classe C e TodosExemplos do
  Exemplos := TodosExemplos
  RegrasParaUmaClasse := {}
  repeat
    complexo := encontre_melhor_complexo(Exemplos,C)
    if complexo ≠ {} then
      Regra := if complexo then classe = C
      RegrasParaUmaClasse := RegrasParaUmaClasse + Regra
      Exemplos := Exemplos - {E : E e Exemplos and
        satisfaz(E,complexo and classe = C)}
    endif
  until Exemplos = {} or complexo = {}
  ConjuntoRegras := ConjuntoRegras + RegrasParaUmaClasse
endfor
return ConjuntoRegras
```

27

## Classificando Novos Exemplos

- ❑ Para classificar um novo exemplo, todas as regras são testadas e aquelas que disparam são coletadas
- ❑ Se mais de uma classe é prevista pelas regras disparadas, o método usual de resolver qual classe deve ser associada ao novo exemplo consiste em associar a cada regra com a distribuição de exemplos cobertos entre classes e então somar essas distribuições para encontrar a classe mais provável
- ❑ Se nenhuma regra for satisfeita pelo novo exemplo, a regra **default** atribui a classe mais comum dos exemplos de treinamento não cobertos por nenhuma regra como sendo a classe do novo exemplo
- ❑ A regra **default** somente é utilizada na classificação de novos exemplos se nenhuma das regras induzidas disparar para o novo exemplo sendo classificado

28

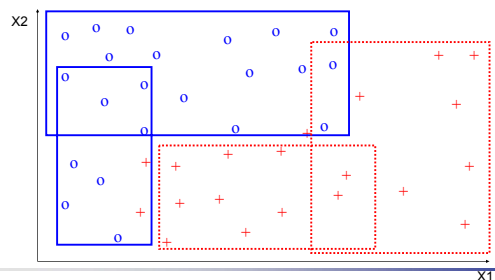
## Classificando Novos Exemplos

- ❑ Por exemplo, considere as três regras sobre um conjunto de exemplos de duas classes de robôs: [inimigo, amigo]:
  - **if** cabeça=quadrada **and** segura=arma **then** classe=inimigo cobre [15i,1a]
  - **if** tamanho=alto **and** voa=não **then** classe=amigo cobre [1i,10a]
  - **if** aparência=bravo **then** classe=inimigo cobre [20i,0a]
- ❑ Dado um novo exemplo com os seguinte atributos cabeça quadrada, segura uma arma, alto, não voador e bravo, todas as três regras disparam
- ❑ Somando os exemplos cobertos [36i,11a], a classe majoritária é então utilizada para prever a classe do novo exemplo — inimigo

29

## Interpretação Geométrica

- ❑ A indução de regras não ordenadas divide o espaço de descrição em regiões que podem se sobrepor, uma vez que cada exemplo pode ser coberto por mais de uma regra



30

## Exemplo

Exemplo	Aparência	Temperatura	Umidade	Ventando	Viajar
E <sub>1</sub>	sol	25	72	sim	bom
E <sub>2</sub>	sol	28	91	sim	ruim
E <sub>3</sub>	sol	22	70	não	bom
E <sub>4</sub>	sol	23	95	não	ruim
E <sub>5</sub>	sol	30	85	não	ruim
E <sub>6</sub>	nublado	23	90	sim	bom
E <sub>7</sub>	nublado	29	78	não	bom
E <sub>8</sub>	nublado	19	65	sim	ruim
E <sub>9</sub>	nublado	26	75	não	bom
E <sub>10</sub>	nublado	20	87	sim	bom
E <sub>11</sub>	chuva	22	95	não	bom
E <sub>12</sub>	chuva	19	70	sim	ruim
E <sub>13</sub>	chuva	23	80	sim	ruim
E <sub>14</sub>	chuva	25	81	não	bom
E <sub>15</sub>	chuva	21	80	não	bom

31

## Exemplo

Exemplo	Aparência	Temperatura	Umidade	Ventando	Viajar	R <sub>1</sub>
E <sub>1</sub>	sol	25	72	sim	bom	
E <sub>2</sub>	sol	28	91	sim	ruim	
E <sub>3</sub>	sol	22	70	não	bom	
E <sub>4</sub>	sol	23	95	não	ruim	
E <sub>5</sub>	sol	30	85	não	ruim	
E <sub>6</sub>	nublado	23	90	sim	bom	
E <sub>7</sub>	nublado	29	78	não	bom	cc
E <sub>8</sub>	nublado	19	65	sim	ruim	
E <sub>9</sub>	nublado	26	75	não	bom	cc
E <sub>10</sub>	nublado	20	87	sim	bom	
E <sub>11</sub>	chuva	22	95	não	bom	
E <sub>12</sub>	chuva	19	70	sim	ruim	
E <sub>13</sub>	chuva	23	80	sim	ruim	
E <sub>14</sub>	chuva	25	81	não	bom	
E <sub>15</sub>	chuva	21	80	não	bom	

C := bom

cplx := aparência = nublado and ventando = não [2b,0r]

R<sub>1</sub> := if aparência = nublado and ventando = não then classe=bom

32

## Exemplo

Exemplo	Aparência	Temperatura	Umidade	Ventando	Viajar	R <sub>1</sub>	R <sub>2</sub>
E <sub>1</sub>	sol	25	72	sim	bom		
E <sub>2</sub>	sol	28	91	sim	ruim		
E <sub>3</sub>	sol	22	70	não	bom		
E <sub>4</sub>	sol	23	95	não	ruim		
E <sub>5</sub>	sol	30	85	não	ruim		
E <sub>6</sub>	nublado	23	90	sim	bom		
E <sub>7</sub>	nublado	29	78	não	bom	cc	
E <sub>8</sub>	nublado	19	65	sim	ruim		
E <sub>9</sub>	nublado	26	75	não	bom	cc	
E <sub>10</sub>	nublado	20	87	sim	bom		
E <sub>11</sub>	chuva	22	95	não	bom		cc
E <sub>12</sub>	chuva	19	70	sim	ruim		cc
E <sub>13</sub>	chuva	23	80	sim	ruim		
E <sub>14</sub>	chuva	25	81	não	bom	cc	
E <sub>15</sub>	chuva	21	80	não	bom	cc	

C := bom

cplx := aparência = chuva and ventando = não [3b,0r]

R<sub>2</sub> := if aparência = chuva and ventando = não then classe=bom

33

## Exemplo

Exemplo	Aparência	Temperatura	Umidade	Ventando	Viajar	R <sub>1</sub>	R <sub>2</sub>	R <sub>3</sub>
E <sub>1</sub>	sol	25	72	sim	bom			
E <sub>2</sub>	sol	28	91	sim	ruim			
E <sub>3</sub>	sol	22	70	não	bom			
E <sub>4</sub>	sol	23	95	não	ruim			
E <sub>5</sub>	sol	30	85	não	ruim			
E <sub>6</sub>	nublado	23	90	sim	bom			
E <sub>7</sub>	nublado	29	78	não	bom	cc		(cc)
E <sub>8</sub>	nublado	19	65	sim	ruim			(cc)
E <sub>9</sub>	nublado	26	75	não	bom	cc		(cc)
E <sub>10</sub>	nublado	20	87	sim	bom			cc
E <sub>11</sub>	chuva	22	95	não	bom		cc	
E <sub>12</sub>	chuva	19	70	sim	ruim			
E <sub>13</sub>	chuva	23	80	sim	ruim			
E <sub>14</sub>	chuva	25	81	não	bom	cc		
E <sub>15</sub>	chuva	21	80	não	bom	cc		

C := bom

cplx := aparência = nublado [2b,1r]

R<sub>3</sub> := if aparência=nublado then classe=bom

34

## Exemplo

Exemplo	Aparência	Temperatura	Umidade	Ventando	Viajar	R <sub>1</sub>	R <sub>2</sub>	R <sub>3</sub>	R <sub>4</sub>
E <sub>1</sub>	sol	25	72	sim	bom				
E <sub>2</sub>	sol	28	91	sim	ruim				
E <sub>3</sub>	sol	22	70	não	bom				ci
E <sub>4</sub>	sol	23	95	não	ruim				cc
E <sub>5</sub>	sol	30	85	não	ruim				cc
E <sub>6</sub>	nublado	23	90	sim	bom			cc	
E <sub>7</sub>	nublado	29	78	não	bom	cc		(cc)	
E <sub>8</sub>	nublado	19	65	sim	ruim			ci	
E <sub>9</sub>	nublado	26	75	não	bom	cc		(cc)	
E <sub>10</sub>	nublado	20	87	sim	bom			cc	
E <sub>11</sub>	chuva	22	95	não	bom		cc		
E <sub>12</sub>	chuva	19	70	sim	ruim				cc
E <sub>13</sub>	chuva	23	80	sim	ruim				
E <sub>14</sub>	chuva	25	81	não	bom	cc			
E <sub>15</sub>	chuva	21	80	não	bom	cc			

C := ruim

cplx := aparência = sol and ventando = não [1b,2r]

R<sub>4</sub> := if aparência = sol and ventando = não then classe=ruim

35

## Exemplo

Exemplo	Aparência	Temperatura	Umidade	Ventando	Viajar	R <sub>1</sub>	R <sub>2</sub>	R <sub>3</sub>	R <sub>4</sub>	R <sub>5</sub>
E <sub>1</sub>	sol	25	72	sim	bom					
E <sub>2</sub>	sol	28	91	sim	ruim					
E <sub>3</sub>	sol	22	70	não	bom					ci
E <sub>4</sub>	sol	23	95	não	ruim					cc
E <sub>5</sub>	sol	30	85	não	ruim					cc
E <sub>6</sub>	nublado	23	90	sim	bom					cc
E <sub>7</sub>	nublado	29	78	não	bom	cc				(cc)
E <sub>8</sub>	nublado	19	65	sim	ruim					ci
E <sub>9</sub>	nublado	26	75	não	bom	cc				(cc)
E <sub>10</sub>	nublado	20	87	sim	bom					cc
E <sub>11</sub>	chuva	22	95	não	bom		cc			
E <sub>12</sub>	chuva	19	70	sim	ruim					cc
E <sub>13</sub>	chuva	23	80	sim	ruim					cc
E <sub>14</sub>	chuva	25	81	não	bom	cc				
E <sub>15</sub>	chuva	21	80	não	bom	cc				

C := ruim

cplx := aparência = chuva and ventando = sim [0b,2r]

R<sub>5</sub> := if aparência = chuva and ventando = sim then classe=ruim

36

## Exemplo

Exemplo	Aparência	Temperatura	Umidade	Ventando	Viajar	R <sub>1</sub>	R <sub>2</sub>	R <sub>3</sub>	R <sub>4</sub>	R <sub>5</sub>	R <sub>6</sub>
E <sub>1</sub>	sol	25	72	sim	bom						ci
E <sub>2</sub>	sol	28	91	sim	ruim						cc
E <sub>3</sub>	sol	22	70	não	bom					ci	
E <sub>4</sub>	sol	23	95	não	ruim						cc
E <sub>5</sub>	sol	30	85	não	ruim					cc	
E <sub>6</sub>	nublado	23	90	sim	bom			cc			
E <sub>7</sub>	nublado	29	78	não	bom	cc		(cc)			
E <sub>8</sub>	nublado	19	65	sim	ruim			ci			
E <sub>9</sub>	nublado	26	75	não	bom	cc		(cc)			
E <sub>10</sub>	nublado	20	87	sim	bom			cc			
E <sub>11</sub>	chuva	22	95	não	bom		cc				
E <sub>12</sub>	chuva	19	70	sim	ruim					cc	
E <sub>13</sub>	chuva	23	80	sim	ruim						cc
E <sub>14</sub>	chuva	25	81	não	bom			cc			
E <sub>15</sub>	chuva	21	80	não	bom			cc			

C := ruim

cplx := aparência = sol and ventando = sim [1b,1r]

R<sub>6</sub> := if aparência = sol and ventando = sim then classe=ruim

37

## Exemplo

Exemplo	Aparência	Temperatura	Umidade	Ventando	Viajar	R <sub>1</sub>	R <sub>2</sub>	R <sub>3</sub>	R <sub>4</sub>	R <sub>5</sub>	R <sub>6</sub>
E <sub>1</sub>	sol	25	72	sim	bom						ci
E <sub>2</sub>	sol	28	91	sim	ruim						cc
E <sub>3</sub>	sol	22	70	não	bom					ci	
E <sub>4</sub>	sol	23	95	não	ruim						cc
E <sub>5</sub>	sol	30	85	não	ruim					cc	
E <sub>6</sub>	nublado	23	90	sim	bom			cc			
E <sub>7</sub>	nublado	29	78	não	bom	cc		(cc)			
E <sub>8</sub>	nublado	19	65	sim	ruim			ci			
E <sub>9</sub>	nublado	26	75	não	bom	cc		(cc)			
E <sub>10</sub>	nublado	20	87	sim	bom			cc			
E <sub>11</sub>	chuva	22	95	não	bom		cc				
E <sub>12</sub>	chuva	19	70	sim	ruim					cc	
E <sub>13</sub>	chuva	23	80	sim	ruim						cc
E <sub>14</sub>	chuva	25	81	não	bom			cc			
E <sub>15</sub>	chuva	21	80	não	bom			cc			

Como nenhum exemplo de treinamento restou sem ser coberto pelo conjunto de regras, a regra *default* é dada pela classe majoritária do conjunto de treinamento

R<sub>7</sub> := classe=bom [9b,6r]

38

## Exemplo

### Lista Final de Regras Não Ordenadas

R <sub>1</sub>	if aparência = nublado and ventando = não then classe=bom [2b,0r]
R <sub>2</sub>	if aparência = chuva and ventando = não then classe=bom [3b,0r]
R <sub>3</sub>	if aparência=nublado then classe=bom [4b,1r]
R <sub>4</sub>	if aparência = sol and ventando = não then classe=ruim [1b,2r]
R <sub>5</sub>	if aparência = chuva and ventando = sim then classe=ruim [0b,2r]
R <sub>6</sub>	if aparência = sol and ventando = sim then classe=ruim [1b,1r]
R <sub>7</sub>	classe=bom [9b,6r] (regra <i>default</i> )

39

## Critérios para Selecionar Complexos/Regras

- Analizando os algoritmos de indução de regras é possível observar que o fator determinante no resultado final depende do critério de seleção da melhor regra/complexo
- Na realidade, existem inúmeros critérios que podem ser escolhidos, cada um, proporcionando um conjunto final de regras bem diversificado
- Um dos possíveis critérios de seleção da melhor regra consiste em escolher a regra com o melhor grau de adequação (*rule fitness*) para o problema em questão
- Denotando-se o grau de adequação de uma regra L→R por *rf(L→R)*, em geral, o critério de seleção escolhe a melhor regra como sendo aquela que possui o maior valor de *rf*
- Veremos dois critérios, dentre os possíveis, para estimar o grau de adequação *rf* de uma regra
  - Confiabilidade Positiva (*prel*)
  - Precisão de Laplace (*lacc*)

40

## Critérios para Selecionar Complexos/Regras

- Uma possível definição para o grau de adequação *rf* utiliza a *confiabilidade positiva (prel)*, definida como a razão entre o número de exemplos corretamente cobertos pela regra e o número total de exemplos cobertos pela regra, ou seja, *lr/l*

$$rf(L \rightarrow R) = \overset{def}{prel}(L \rightarrow R) = p(R | L) = \frac{lr}{l}$$

- A confiabilidade positiva assume valores no intervalo  $0 \leq prel(L \rightarrow R) \leq 1$
- Por definição:  $0/0 = 0$

41

## Critérios para Selecionar Complexos/Regras

- Entretanto, a confiabilidade positiva possui uma propriedade indesejada
- Por exemplo, considere duas regras
  - L<sub>1</sub>→R<sub>1</sub>, com l<sub>1</sub>r<sub>1</sub>=100, l<sub>1</sub>¬r<sub>1</sub>=1,
  - L<sub>2</sub>→R<sub>2</sub>, com l<sub>2</sub>r<sub>2</sub>=5, l<sub>2</sub>¬r<sub>2</sub>=0
- Nesse caso:
  - prel(L<sub>1</sub>→R<sub>1</sub>) = l<sub>1</sub>r<sub>1</sub>/l<sub>1</sub> = 100/101 = 0.99
  - prel(L<sub>2</sub>→R<sub>2</sub>) = l<sub>2</sub>r<sub>2</sub>/l<sub>2</sub> = 5/5 = 1.00
- indicando que L<sub>2</sub>→R<sub>2</sub> é uma regra melhor do que L<sub>1</sub>→R<sub>1</sub>, o que não procede neste caso

42

## Critérios para Selecionar Complexos/Regras

- Uma solução para o problema apresentado pela confiabilidade positiva consiste em substituí-la pela precisão de Laplace ( $lacc$ ):

$$rf(L \rightarrow R) \stackrel{def}{=} lacc(L \rightarrow R) = \frac{l_r + 1.0}{l + k}$$

- onde  $k$  é o número de classes do conjunto de exemplos
- A precisão de Laplace assume valores no intervalo  $0 < lacc(L \rightarrow R) < 1$

43

## Critérios para Selecionar Complexos/Regras

- Ainda considerando o exemplo anterior em um problema com  $k = 2$  classes, tem-se que
  - $L_1 \rightarrow R_1$ , com  $l_1 r_1 = 100$ ,  $l_1 \neg r_1 = 1$ ,
  - $L_2 \rightarrow R_2$ , com  $l_2 r_2 = 5$ ,  $l_2 \neg r_2 = 0$
  - Temos, portanto:
    - $lacc(L_1 \rightarrow R_1) = (l_1 r_1 + 1) / (l_1 + 2) = 101 / 103 = 0.98$
    - $lacc(L_2 \rightarrow R_2) = (l_2 r_2 + 1) / (l_2 + 2) = 6 / 7 = 0.86$
  - indicando que  $L_1 \rightarrow R_1$  é uma regra melhor do que  $L_2 \rightarrow R_2$

44

## Exemplo

- Encontrar Melhor Complexo/Regras Não-Ordenadas usando a confiabilidade positiva como  $rf$

Exemplo	Aparência	Temperatura	Umidade	Ventando	Jogar
E <sub>1</sub>	sol	quente	alta	falso	não
E <sub>2</sub>	sol	quente	alta	verdadeiro	não
E <sub>3</sub>	nublado	quente	alta	falso	sim
E <sub>4</sub>	chuva	agradável	alta	falso	sim
E <sub>5</sub>	chuva	fria	normal	falso	sim
E <sub>6</sub>	chuva	fria	normal	verdadeiro	não
E <sub>7</sub>	nublado	fria	normal	verdadeiro	sim
E <sub>8</sub>	sol	agradável	alta	falso	não
E <sub>9</sub>	sol	fria	normal	falso	sim
E <sub>10</sub>	chuva	agradável	normal	falso	sim
E <sub>11</sub>	sol	agradável	normal	verdadeiro	sim
E <sub>12</sub>	nublado	agradável	alta	verdadeiro	sim
E <sub>13</sub>	nublado	quente	normal	falso	sim
E <sub>14</sub>	chuva	agradável	alta	verdadeiro	não

45

## Induzindo R<sub>1</sub> (classe=sim)

Aparência	sim	não	Total	Temperatura	sim	não	Total	Umidade	sim	não	Total	Ventando	sim	não	Total	Jogar	sim	não	Total
sol	2	3	5	quente	2	2	4	alta	3	4	7	falso	6	2	8	sim	9	não	9
nublado	4	0	4	agradável	4	2	6	normal	6	1	7	verdadeiro	3	3	6	não	5	não	5
chuva	3	2	5	fria	3	1	4												
Total	9	5	14	Total	9	5	14	Total	9	5	14	Total	9	5	14	Total	14	14	14

Aparência	sol	2/5 = 0.40
	nublado	4/4 = 1.00
	chuva	3/5 = 0.60
Temperatura	quente	2/4 = 0.50
	agradável	4/6 = 0.67
	fria	3/4 = 0.75
Umidade	alta	3/7 = 0.43
	normal	6/7 = 0.86
Ventando	falso	6/8 = 0.75
	verdadeiro	3/6 = 0.50

46

## Induzindo R<sub>1</sub> (classe=sim)

- Complexo := Aparência=nublado [4s,0n]
- Como o complexo cria uma partição de exemplos de uma mesma classe, não é necessário especializá-lo
- $R_1$  := if Aparência=nublado then classe=sim
- Os exemplos cobertos corretamente pela regra  $R_1$  são removidos do conjunto de treinamento

47

## Exemplos Cobertos pela Regra R<sub>1</sub>

Exemplo	Aparência	Temperatura	Umidade	Ventando	Jogar
E <sub>1</sub>	sol	quente	alta	falso	não
E <sub>2</sub>	sol	quente	alta	verdadeiro	não
<del>E<sub>3</sub></del>	<del>nublado</del>	<del>quente</del>	<del>alta</del>	<del>falso</del>	<del>sim</del>
E <sub>4</sub>	chuva	agradável	alta	falso	sim
E <sub>5</sub>	chuva	fria	normal	falso	sim
E <sub>6</sub>	chuva	fria	normal	verdadeiro	não
<del>E<sub>7</sub></del>	<del>nublado</del>	<del>fria</del>	<del>normal</del>	<del>verdadeiro</del>	<del>sim</del>
E <sub>8</sub>	sol	agradável	alta	falso	não
E <sub>9</sub>	sol	fria	normal	falso	sim
E <sub>10</sub>	chuva	agradável	normal	falso	sim
E <sub>11</sub>	sol	agradável	normal	verdadeiro	sim
<del>E<sub>12</sub></del>	<del>nublado</del>	<del>agradável</del>	<del>alta</del>	<del>verdadeiro</del>	<del>sim</del>
<del>E<sub>13</sub></del>	<del>nublado</del>	<del>quente</del>	<del>normal</del>	<del>falso</del>	<del>sim</del>
E <sub>14</sub>	chuva	agradável	alta	verdadeiro	não

48



## Induzindo $R_2$ (classe=sim)

Aparência	sim	não	Total	Temperatura	sim	não	Total	Umidade	sim	não	Total	Ventando	sim	não	Total	Jogar	
sol	2	3	5	quente	0	2	2	alta	1	4	5	falso	4	2	6	sim	5
nublado	0	0	0	agradável	3	2	5	normal	4	1	5	verdadeiro	1	3	4	não	5
chuva	3	2	5	fria	2	1	3	fria	0	1	1						
Total	5	5	10	Total	5	5	10	Total	5	5	10	Total	5	5	10	Total	10

Aparência	sol	2/5 = 0.40
	nublado	0/0 = 0.00
	chuva	3/5 = 0.60
Temperatura	quente	0/2 = 0.00
	agradável	3/5 = 0.60
	fria	2/3 = 0.67
Umidade	alta	1/5 = 0.20
	normal	4/5 = 0.80
Ventando	falso	4/6 = 0.67
	verdadeiro	1/4 = 0.25

49

## Induzindo $R_2$ (classe=sim) Umidade=normal

- ☐ complexo := Umidade=normal [4s, 1n]
- ☐ Como o complexo cria partições contendo exemplos de mais de uma classe, ele deve ser especializado

50

## Induzindo $R_2$ (classe=sim) Umidade=normal

Aparência	sim	não	Total	Temperatura	sim	não	Total	Umidade	sim	não	Total	Ventando	sim	não	Total	Jogar	
sol	2	0	2	quente	0	0	0	alta	0	0	0	falso	3	0	3	sim	4
nublado	0	0	0	agradável	2	0	2	normal	4	1	5	verdadeiro	1	1	2	não	1
chuva	2	1	3	fria	2	1	3	fria	0	1	1						
Total	4	1	5	Total	4	1	5	Total	4	1	5	Total	4	1	5	Total	5

Aparência	sol	2/2 = 1.00
	nublado	0/0 = 0.00
	chuva	2/3 = 0.67
Temperatura	quente	0/0 = 0.00
	agradável	2/2 = 1.00
	fria	2/3 = 0.67
Ventando	falso	3/3 = 1.00
	verdadeiro	1/2 = 0.50

No caso de empate em um valor  $lr/l$ , escolher o atributo-valor com maior  $lr$

51

## Induzindo $R_2$ (classe=sim) Umidade=normal and Ventando=falso

- ☐ complexo := Umidade=normal and Ventando=falso [3s, 0n]
- ☐ Como o complexo cria uma partição de exemplos de uma mesma classe, não é necessário especializá-lo
- ☐  $R_2$  := if Umidade=normal and Ventando=falso then classe=sim
- ☐ Os exemplos cobertos corretamente pela regra  $R_2$  são removidos do conjunto de treinamento

52

## Exemplos Cobertos pelas Regras $R_1$ e $R_2$

Exemplo	Aparência	Temperatura	Umidade	Ventando	Jogar
E <sub>1</sub>	sol	quente	alta	falso	não
E <sub>2</sub>	sol	quente	alta	verdadeiro	não
E <sub>3</sub>	nublado	quente	alta	falso	sim
E <sub>4</sub>	chuva	agradável	alta	falso	sim
E <sub>5</sub>	chuva	fria	normal	falso	sim
E <sub>6</sub>	chuva	fria	normal	verdadeiro	não
E <sub>7</sub>	nublado	fria	normal	verdadeiro	sim
E <sub>8</sub>	sol	agradável	alta	falso	não
E <sub>9</sub>	sol	fria	normal	falso	sim
E <sub>10</sub>	chuva	agradável	normal	falso	sim
E <sub>11</sub>	sol	agradável	normal	verdadeiro	sim
E <sub>12</sub>	nublado	agradável	alta	verdadeiro	sim
E <sub>13</sub>	nublado	quente	normal	falso	sim
E <sub>14</sub>	chuva	agradável	alta	verdadeiro	não

53

## Induzindo $R_3$ (classe=sim)

Aparência	sim	não	Total	Temperatura	sim	não	Total	Umidade	sim	não	Total	Ventando	sim	não	Total	Jogar	
sol	1	3	4	quente	0	2	2	alta	1	4	5	falso	1	2	3	sim	2
nublado	0	0	0	agradável	2	2	4	normal	1	1	2	verdadeiro	1	3	4	não	5
chuva	1	2	3	fria	0	1	1	fria	0	1	1						
Total	2	5	7	Total	2	5	7	Total	2	5	7	Total	2	5	7	Total	7

Aparência	sol	1/4 = 0.25
	nublado	0/0 = 0.00
	chuva	1/3 = 0.33
Temperatura	quente	0/2 = 0.00
	agradável	2/4 = 0.50
	fria	0/1 = 0.00
Umidade	alta	1/5 = 0.20
	normal	1/2 = 0.50
Ventando	falso	1/3 = 0.33
	verdadeiro	1/4 = 0.25

54

## Induzindo $R_3$ (classe=sim) Temperatura=agradável

- complexo := Temperatura=agradável [2s,2n]
- Como o complexo cria partições contendo exemplos de mais de uma classe, ele deve ser especializado

55

## Induzindo $R_3$ (classe=sim) Temperatura=agradável

Aparência	sim	não	Total	Temperatura	sim	não	Total	Umidade	sim	não	Total	Ventando	sim	não	Total	Jogar	
sol	1	1	2	quente	0	0	0	alta	1	2	3	falso	1	1	2	sim	2
nublado	0	0	0	agradável	2	2	4	normal	1	0	1	verdadeiro	1	1	2	não	2
chuva	1	1	2	fria	0	0	0										
Total	2	2	4	Total	2	2	4	Total	2	2	4	Total	2	2	4	Total	4

Aparência	sol	1/2 = 0.50
	nublado	0/0 = 0.00
	chuva	1/2 = 0.50
Umidade	alta	1/3 = 0.33
	normal	1/1 = 1.00
Ventando	falso	1/2 = 0.50
	verdadeiro	1/2 = 0.50

56

## Induzindo $R_3$ (classe=sim) Temperatura=agradável and Umidade=normal

- complexo := Temperatura=agradável and Umidade=normal [1s,0n]
- Como o complexo cria uma partição de exemplos de uma mesma classe, não é necessário especializá-lo
- $R_3$  := if Temperatura=agradável and Umidade=normal then classe=sim
- Os exemplos cobertos corretamente pela regra  $R_3$  são removidos do conjunto de treinamento
- Note que o algoritmo pode decidir em não criar regras cuja cobertura esteja abaixo de um valor limite mínimo para evitar *overfitting*

57

## Exemplos Cobertos pelas Regras $R_1, R_2$ e $R_3$

Exemplo	Aparência	Temperatura	Umidade	Ventando	Jogar
E <sub>1</sub>	sol	quente	alta	falso	não
E <sub>2</sub>	sol	quente	alta	verdadeiro	não
E <sub>3</sub>	nublado	quente	alta	falso	sim
E <sub>4</sub>	chuva	agradável	alta	falso	sim
E <sub>5</sub>	chuva	fria	normal	falso	sim
E <sub>6</sub>	chuva	fria	normal	verdadeiro	não
E <sub>7</sub>	nublado	fria	normal	verdadeiro	sim
E <sub>8</sub>	sol	agradável	alta	falso	não
E <sub>9</sub>	sol	fria	normal	falso	sim
E <sub>10</sub>	chuva	agradável	normal	falso	sim
E <sub>11</sub>	sol	agradável	normal	verdadeiro	sim
E <sub>12</sub>	nublado	agradável	alta	verdadeiro	sim
E <sub>13</sub>	nublado	quente	normal	falso	sim
E <sub>14</sub>	chuva	agradável	alta	verdadeiro	não

58

## Induzindo $R_4$ (classe=sim)

Aparência	sim	não	Total	Temperatura	sim	não	Total	Umidade	sim	não	Total	Ventando	sim	não	Total	Jogar	
sol	0	3	3	quente	0	2	2	alta	1	4	5	falso	1	2	3	sim	1
nublado	0	0	0	agradável	1	2	3	normal	0	1	1	verdadeiro	0	3	3	não	5
chuva	1	2	3	fria	0	1	1										
Total	1	5	6	Total	1	5	6	Total	1	5	6	Total	1	5	6	Total	6

Aparência	sol	0/3 = 0.00
	nublado	0/0 = 0.00
	chuva	1/3 = 0.33
Temperatura	quente	0/2 = 0.00
	agradável	1/3 = 0.33
	fria	0/1 = 0.00
Umidade	alta	1/5 = 0.20
	normal	0/1 = 0.00
Ventando	falso	1/3 = 0.33
	verdadeiro	0/3 = 0.00

59

## Induzindo $R_4$ (classe=sim) Aparência=chuva

- complexo := Aparência=chuva [1s,2n]
- Como o complexo cria partições contendo exemplos de mais de uma classe, ele deve ser especializado

60

## Induzindo $R_4$ (classe=sim) Aparência=chuva

Aparência	sim	não	Total	Temperatura	sim	não	Total	Umidade	sim	não	Total	Ventando	sim	não	Total	Jogar	
sol	0	0	0	quente	0	0	0	alta	1	1	2	falso	1	0	1	sim	1
nublado	0	0	0	agradável	1	1	2	normal	0	1	1	verdadeiro	0	2	2	não	2
chuva	1	2	3	fria	0	1	1										
Total	1	2	3	Total	1	2	3	Total	1	2	3	Total	1	2	3	Total	3

Temperatura	quente	0/0 = 0.00
	agradável	1/2 = 0.50
	fria	0/1 = 0.00
Umidade	alta	1/2 = 0.50
	normal	0/1 = 0.00
Ventando	falso	1/1 = 1.00
	verdadeiro	0/2 = 0.00

61

## Induzindo $R_4$ (classe=sim) Aparência=chuva and Ventando=falso

- complexo := Aparência=chuva and Ventando=falso [1s,0n]
- Como o complexo cria uma partição de exemplos de uma mesma classe, não é necessário especializá-lo
- $R_4$  := if Aparência=chuva and Ventando=falso then classe=sim
- Os exemplos cobertos corretamente pela regra  $R_4$  são removidos do conjunto de treinamento
- Como todos os exemplos da classe **sim** foram removidos, a indução de regras para classe=sim termina

62

## Exemplos Cobertos pelas Regras $R_1, R_2, R_3$ e $R_4$

Exemplo	Aparência	Temperatura	Umidade	Ventando	Jogar
E <sub>1</sub>	sol	quente	alta	falso	não
E <sub>2</sub>	sol	quente	alta	verdadeiro	não
E <sub>3</sub>	nublado	quente	alta	falso	sim
E <sub>4</sub>	chuva	agradável	alta	falso	sim
E <sub>5</sub>	chuva	fria	normal	falso	sim
E <sub>6</sub>	chuva	fria	normal	verdadeiro	não
E <sub>7</sub>	nublado	fria	normal	verdadeiro	sim
E <sub>8</sub>	sol	agradável	alta	falso	não
E <sub>9</sub>	sol	fria	normal	falso	sim
E <sub>10</sub>	chuva	agradável	normal	falso	sim
E <sub>11</sub>	sol	agradável	normal	verdadeiro	sim
E <sub>12</sub>	nublado	agradável	alta	verdadeiro	sim
E <sub>13</sub>	nublado	quente	normal	falso	sim
E <sub>14</sub>	chuva	agradável	alta	verdadeiro	não

63

## Induzindo $R_5$ (classe=não)

- Como todos os exemplos da classe=sim foram cobertos pelas regras  $R_1, R_2, R_3$  e  $R_4$ , o processo agora continua para a classe=não
- Para isso, todos os exemplos são considerados novamente (conjunto completo de treinamento)

64

## Induzindo $R_5$ (classe=não)

Aparência	sim	não	Total	Temperatura	sim	não	Total	Umidade	sim	não	Total	Ventando	sim	não	Total	Jogar	
sol	2	3	5	quente	2	4	6	alta	3	4	7	falso	6	2	8	sim	9
nublado	4	0	4	agradável	4	2	6	normal	6	1	7	verdadeiro	3	3	6	não	5
chuva	3	2	5	fria	3	1	4										
Total	9	5	14	Total	9	5	14	Total	9	5	14	Total	9	5	14	Total	14

Aparência	sol	3/5 = 0.60
	nublado	0/4 = 0.00
	chuva	2/5 = 0.40
Temperatura	quente	2/4 = 0.50
	agradável	2/6 = 0.33
	fria	1/4 = 0.25
Umidade	alta	4/7 = 0.57
	normal	1/7 = 0.14
Ventando	falso	2/8 = 0.25
	verdadeiro	3/6 = 0.50

65

## Induzindo $R_5$ (classe=não) Aparência=sol

- complexo := Aparência=sol [2s,3n]
- Como o complexo cria partições contendo exemplos de mais de uma classe, ele deve ser especializado

66

## Induzindo R<sub>5</sub> (classe=não) Aparência=sol

Aparência	sim	não	Total	Temperatura	sim	não	Total	Umidade	sim	não	Total	Ventando	sim	não	Total	Jogar	
sol	2	3	5	quente	0	2	2	alta	0	3	3	falso	1	2	3	sim	2
nublado	0	0	0	agradável	1	1	2	normal	2	0	2	verdadeiro	1	1	2	não	3
chuva	0	0	0	fria	1	0	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Total	2	3	5	Total	2	3	5	Total	2	3	5	Total	2	3	5	Total	5

Temperatura	quente	2/2 = 1.00
	agradável	1/2 = 0.50
	fria	0/1 = 0.00
Umidade	alta	3/3 = 1.00
	normal	0/2 = 0.00
Ventando	falso	2/3 = 0.67
	verdadeiro	1/2 = 0.50

67

## Induzindo R<sub>5</sub> (classe=não) Aparência=sol and Umidade=alta

- complexo := Aparência=sol and Umidade=alta [0s,3n]
- R<sub>5</sub> := if Aparência=sol and Umidade=alta then classe=não
- Os exemplos cobertos corretamente pela regra R<sub>5</sub> são removidos do conjunto de treinamento

68

## Exemplos Cobertos pelas Regra R<sub>5</sub>

Exemplo	Aparência	Temperatura	Umidade	Ventando	Jogar
E <sub>1</sub>	sol	quente	alta	falso	não
E <sub>2</sub>	sol	quente	alta	verdadeiro	não
E <sub>3</sub>	nublado	quente	alta	falso	sim
E <sub>4</sub>	chuva	agradável	alta	falso	sim
E <sub>5</sub>	chuva	fria	normal	falso	sim
E <sub>6</sub>	chuva	fria	normal	verdadeiro	não
E <sub>7</sub>	nublado	fria	normal	verdadeiro	sim
E <sub>8</sub>	sol	agradável	alta	falso	não
E <sub>9</sub>	sol	fria	normal	falso	sim
E <sub>10</sub>	chuva	agradável	normal	falso	sim
E <sub>11</sub>	sol	agradável	normal	verdadeiro	sim
E <sub>12</sub>	nublado	agradável	alta	verdadeiro	sim
E <sub>13</sub>	nublado	quente	normal	falso	sim
E <sub>14</sub>	chuva	agradável	alta	verdadeiro	não

69

## Induzindo R<sub>6</sub> (classe=não)

Aparência	sim	não	Total	Temperatura	sim	não	Total	Umidade	sim	não	Total	Ventando	sim	não	Total	Jogar	
sol	2	0	2	quente	2	0	2	alta	3	1	4	falso	6	0	6	sim	9
nublado	4	0	4	agradável	4	1	5	normal	6	1	7	verdadeiro	3	2	5	não	2
chuva	3	2	5	fria	3	1	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Total	9	2	11	Total	9	2	11	Total	9	2	11	Total	9	2	11	Total	11

Aparência	sol	0/2 = 0.00
	nublado	0/4 = 0.00
	chuva	2/5 = 0.40
Temperatura	quente	0/2 = 0.00
	agradável	1/5 = 0.20
	fria	1/4 = 0.25
Umidade	alta	1/4 = 0.25
	normal	1/7 = 0.14
Ventando	falso	0/6 = 0.00
	verdadeiro	2/5 = 0.40

70

## Induzindo R<sub>6</sub> (classe=não) Aparência=chuva

- complexo := Aparência=chuva [3s,2n]
- Como o complexo cria partições contendo exemplos de mais de uma classe, ele deve ser especializado

71

## Induzindo R<sub>6</sub> (classe=não) Aparência=chuva

Aparência	sim	não	Total	Temperatura	sim	não	Total	Umidade	sim	não	Total	Ventando	sim	não	Total	Jogar	
sol	0	0	0	quente	0	0	0	alta	1	1	2	falso	3	0	3	sim	3
nublado	0	0	0	agradável	2	1	3	normal	2	1	3	verdadeiro	0	2	2	não	2
chuva	3	2	5	fria	1	1	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Total	3	2	5	Total	3	2	5	Total	3	2	5	Total	3	2	5	Total	5

Temperatura	quente	0/0 = 0.00
	agradável	1/3 = 0.33
	fria	1/2 = 0.50
Umidade	alta	1/2 = 0.50
	normal	1/3 = 0.33
Ventando	falso	0/3 = 0.00
	verdadeiro	2/2 = 1.00

72

## Induzindo $R_6$ (classe=não)

Aparência=chuva and Ventando=verdadeiro

- complexo := Aparência=chuva and Ventando=verdadeiro [0s,2n]
- $R_6$  := if Aparência=chuva and Ventando=verdadeiro then classe=não
- Os exemplos cobertos corretamente pela regra  $R_6$  são removidos do conjunto de treinamento
- Como não restam mais exemplos, o processo de indução termina
- Como não há exemplos remanescentes não classificados, a regra *default* pode ser dada pela classe majoritária

73

## Exemplos Cobertos pelas Regras

$R_5$  e  $R_6$

Exemplo	Aparência	Temperatura	Umidade	Ventando	Jogar
E <sub>1</sub>	sol	quente	alta	falso	não
E <sub>2</sub>	sol	quente	alta	verdadeiro	não
E <sub>3</sub>	nublado	quente	alta	falso	sim
E <sub>4</sub>	chuva	agradável	alta	falso	sim
E <sub>5</sub>	chuva	fria	normal	falso	sim
E <sub>6</sub>	chuva	fria	normal	verdadeiro	não
E <sub>7</sub>	nublado	fria	normal	verdadeiro	sim
E <sub>8</sub>	sol	agradável	alta	falso	não
E <sub>9</sub>	sol	fria	normal	falso	sim
E <sub>10</sub>	chuva	agradável	normal	falso	sim
E <sub>11</sub>	sol	agradável	normal	verdadeiro	sim
E <sub>12</sub>	nublado	agradável	alta	verdadeiro	sim
E <sub>13</sub>	nublado	quente	normal	falso	sim
E <sub>14</sub>	chuva	agradável	alta	verdadeiro	não

74

## Conjunto de Regras Induzidas

### Conjunto Final de Regras Não Ordenadas Induzidas

$R_1$	if Aparência=nublado then classe=sim [4s,0n]
$R_2$	if Umidade=normal and Ventando=falso then classe=sim [4s,0n]
$R_3$	if Temperatura=agradável and Umidade=normal then classe=sim [2s,0n]
$R_4$	if Aparência=chuva and Ventando=falso then classe=sim [3s,0n]
$R_5$	if Aparência=sol and Umidade=alta then classe=não [0s,3n]
$R_6$	if Aparência=chuva and Ventando=verdadeiro then classe=não [0s,2n]
$R_7$	classe=sim [9s,5n] (regra <i>default</i> )

75

## Conjunto de Regras Induzidas

$R_1$	if Aparência=nublado then classe=sim [4s,0n]
$R_2$	if Umidade=normal and Ventando=falso then classe=sim [4s,0n]
$R_3$	if Temperatura=agradável and Umidade=normal then classe=sim [2s,0n]
$R_4$	if Aparência=chuva and Ventando=falso then classe=sim [3s,0n]
$R_5$	if Aparência=sol and Umidade=alta then classe=não [0s,3n]
$R_6$	if Aparência=chuva and Ventando=verdadeiro then classe=não [0s,2n]

Exemplo	Aparência	Temperatura	Umidade	Ventando	Jogar	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$	$R_5$	$R_6$
E <sub>1</sub>	sol	quente	alta	falso	não						cc
E <sub>2</sub>	sol	quente	alta	verdadeiro	não						cc
E <sub>3</sub>	nublado	quente	alta	falso	sim	cc					
E <sub>4</sub>	chuva	agradável	alta	falso	sim					cc	
E <sub>5</sub>	chuva	fria	normal	falso	sim		cc		cc		
E <sub>6</sub>	chuva	fria	normal	verdadeiro	não						cc
E <sub>7</sub>	nublado	fria	normal	verdadeiro	sim	cc					
E <sub>8</sub>	sol	agradável	alta	falso	não						cc
E <sub>9</sub>	sol	fria	normal	falso	sim		cc				
E <sub>10</sub>	chuva	agradável	normal	falso	sim		cc	cc	cc		
E <sub>11</sub>	sol	agradável	normal	verdadeiro	sim				cc		
E <sub>12</sub>	nublado	agradável	alta	verdadeiro	sim	cc					
E <sub>13</sub>	nublado	quente	normal	falso	sim	cc	cc				
E <sub>14</sub>	chuva	agradável	alta	verdadeiro	não						cc

76

## Poda de Regras

- A poda de regras sempre ocorre a partir das condições mais à direita (últimas condições a serem induzidas) para as condições mais à esquerda (primeiras condições a serem induzidas), de forma iterativa
- Por exemplo, assumamos que a seguinte regra com 3 condições foi induzida
  - if  $A$  and  $B$  and  $C$  then classe = sim
- O processo de poda, inicialmente, tentaria eliminar a última condição  $C$ , resultando na regra:
  - if  $A$  and  $B$  then classe = sim
- Após a poda da condição  $C$ , o processo se repetiria, tentando eliminar a condição  $B$ , resultando na regra:
  - if  $A$  then classe = sim

77

## Poda de Regras

- Assuma que a seguinte regra foi induzida
  - $\mathcal{R}$ : if  $A$  and  $B$  and  $C$  then classe = sim
- Assim, a regra  $\mathcal{R}$  poderia ser podada, gerando a regra  $\mathcal{R}'$ :
  - $\mathcal{R}'$ : if  $A$  and  $B$  then classe = sim
- Assuma também que:
  - $\mathcal{R}$ : 10 exemplos de treinamento satisfazem a condição " $A$  and  $B$  and  $C$ ", sendo que 9 deles possuem classe=sim
    - ❖ erro( $\mathcal{R}$ ) = f = S/N = 1/10 = 0.10
  - $\mathcal{R}'$ : 20 exemplos de treinamento satisfazem a condição " $A$  and  $B$ ", sendo que 17 deles possuem classe=sim
    - ❖ erro( $\mathcal{R}'$ ) = f = S/N = 3/20 = 0.15

78

## Erro Pessimista

- Usaremos o erro pessimista (**perr**), lembrando que  $f=S/N$  e que utilizamos o limite superior do intervalo de confiança dado pela equação

$$p = \frac{f + \frac{z^2}{2N} \pm z \sqrt{\frac{f}{N} - \frac{f^2}{N} + \frac{z^2}{4N^2}}}{1 + \frac{z^2}{N}}$$

- Ou seja, **perr** é definido como

$$\text{perr} = \frac{f + \frac{z^2}{2N} + z \sqrt{\frac{f}{N} - \frac{f^2}{N} + \frac{z^2}{4N^2}}}{1 + \frac{z^2}{N}}$$

z	Nível de Confiança
3.00	99.73%
2.00	95.45%
1.65	90.11%
1.29	80.29%
1.00	68.27%

79

## Poda de Regras

- As taxas de erro pessimistas para  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}'$  com nível de confiança de 95% ( $z=2$ ) são:

$$\text{perr}(\mathcal{R}) = \frac{0.10 + \frac{2^2}{2 \times 10} + 2 \sqrt{\frac{0.10}{10} - \frac{0.10^2}{10} + \frac{2^2}{4 \times 10^2}}}{1 + \frac{2^2}{10}} = 0.4112$$

$$\text{perr}(\mathcal{R}') = \frac{0.15 + \frac{2^2}{2 \times 20} + 2 \sqrt{\frac{0.15}{20} - \frac{0.15^2}{20} + \frac{2^2}{4 \times 20^2}}}{1 + \frac{2^2}{20}} = 0.3653$$

- Como  $\text{perr}(\mathcal{R}') < \text{perr}(\mathcal{R})$ , a condição  $C$  deve ser removida da regra  $\mathcal{R}$

80

## Resumo

- Vantagens da Indução de Regras
  - Compreensibilidade
  - Requer pouca memória
- Limitações
  - Processo de aprendizado mais lento do que árvores
  - Geralmente há mais parâmetros para serem ajustados

81