Árvores

- Nesta aula veremos conceitos e definições sobre árvores
- Diferentemente das estruturas de pilhas, filas e listas que são lineares, uma **árvore** é uma estrutura de dados não linear

Algoritmos e Estruturas de Dados I

José Augusto Baranauskas
Departamento de Física e Matemática – FFCLRP-USP

augusto@usp.br
http://dfm.ffclrp.usp.br/~augusto

Introdução

- Como visto, listas podem ser convenientemente definidas da seguinte forma: Uma lista do tipo **T** é
  - Uma lista (estrutura) vazia ou
  - Uma concatenação (cadeia) de um elemento do tipo **T** com uma lista cujo tipo básico também seja **T**
- Nota-se que a recursão é utilizada como ferramenta de definição
- Um árvore é uma estrutura sofisticada cuja definição por meio de recursão é elegante e eficaz
- Uma árvore, com tipo **T**, pode ser definida recursivamente da seguinte forma:
  - Uma árvore (estrutura) vazia ou
  - Um nó do tipo **T** associado a um número finito de estruturas disjuntas de árvore do mesmo tipo **T**, denominadas **subárvores**

Introdução

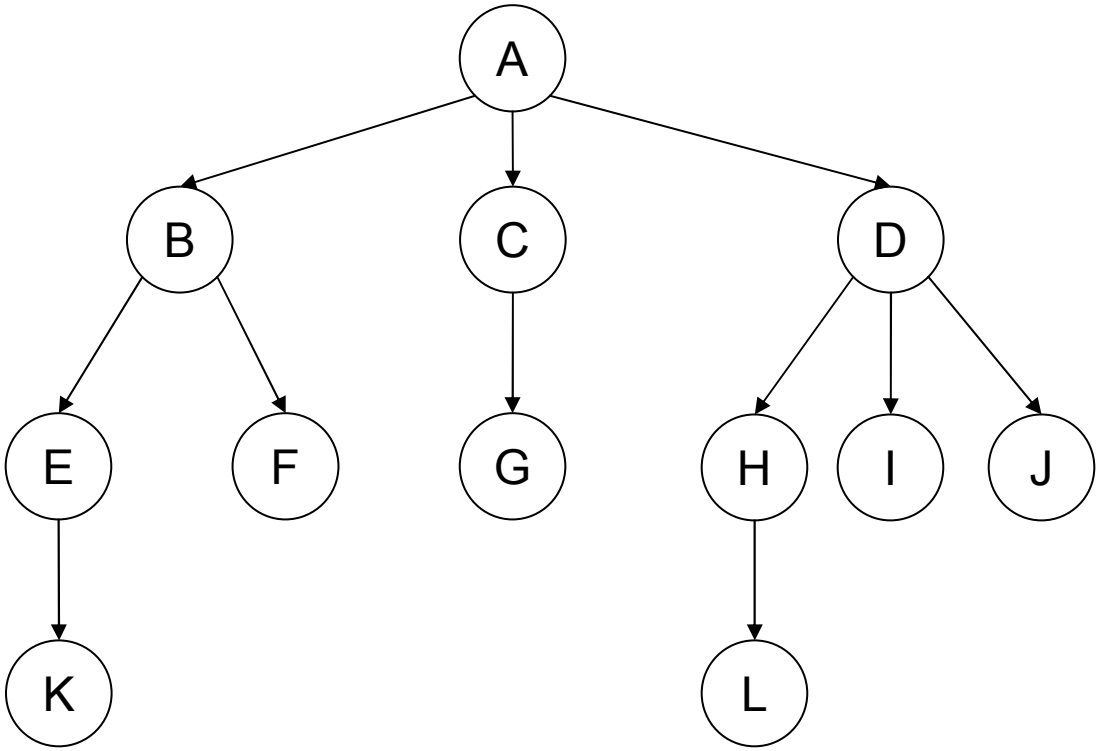
- Observando a similaridade das definições é evidente que uma lista possa ser considerada como uma árvore na qual cada nó tem, no máximo, uma única subárvore
- Por este motivo, uma **lista** é também denominada **árvore degenerada**

Definição

- Uma **árvore** é um conjunto finito de um ou mais nós (ou vértices) tais que
  - Existe um nó especial, denominado **raiz**
  - Os demais nós encontram-se desdobrados em $n \geq 0$ conjuntos disjuntos T_1, ..., T_n sendo que cada conjunto se constitui numa árvore
  - T_1, ..., T_n são denominadas subárvores da raiz
- Utilizaremos grafos para representar árvores
- Todavia, existem outras representações equivalentes para árvores: conjuntos aninhados (diagrama de inclusão), parênteses aninhados, paragrafação (*indentation*)

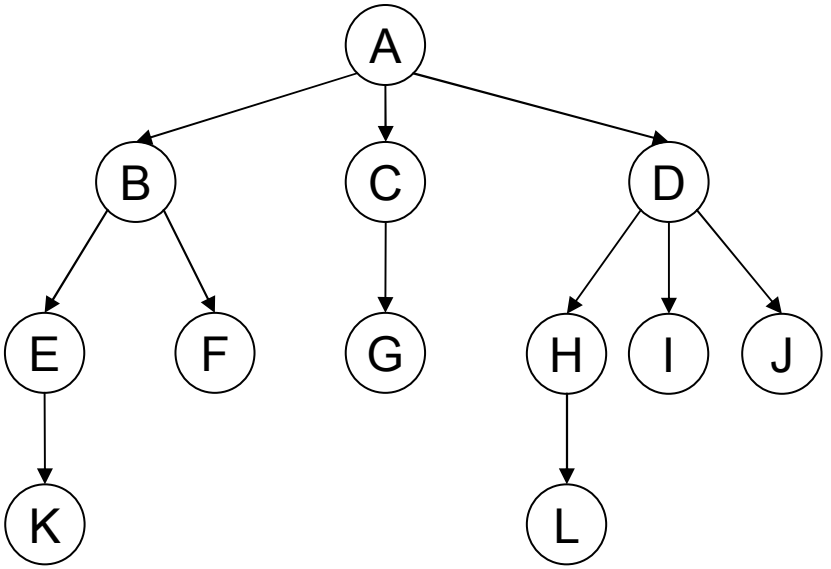
Representações

- Uma árvore é um grafo sem ciclos

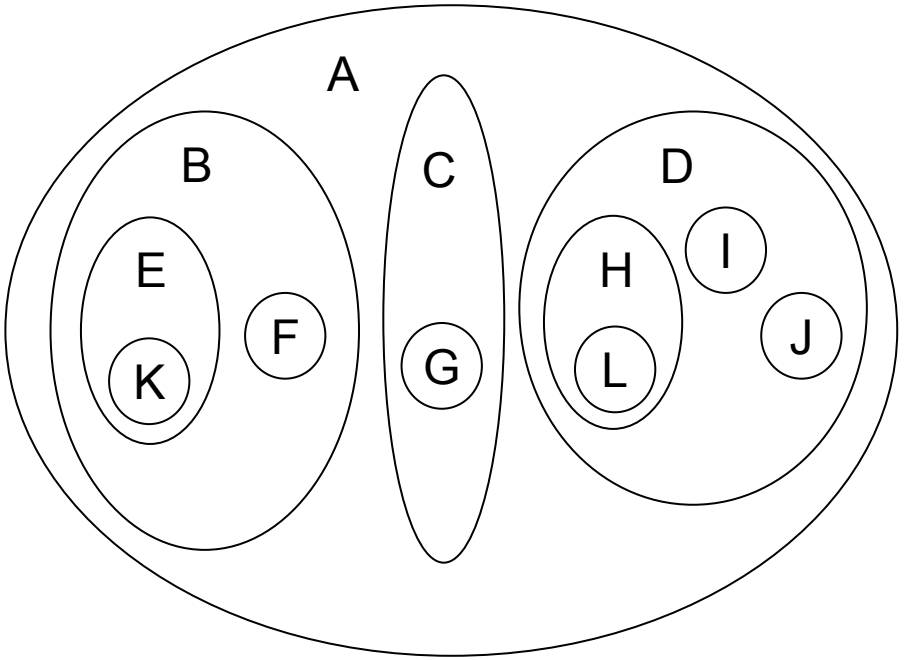


Representações

- Grafo

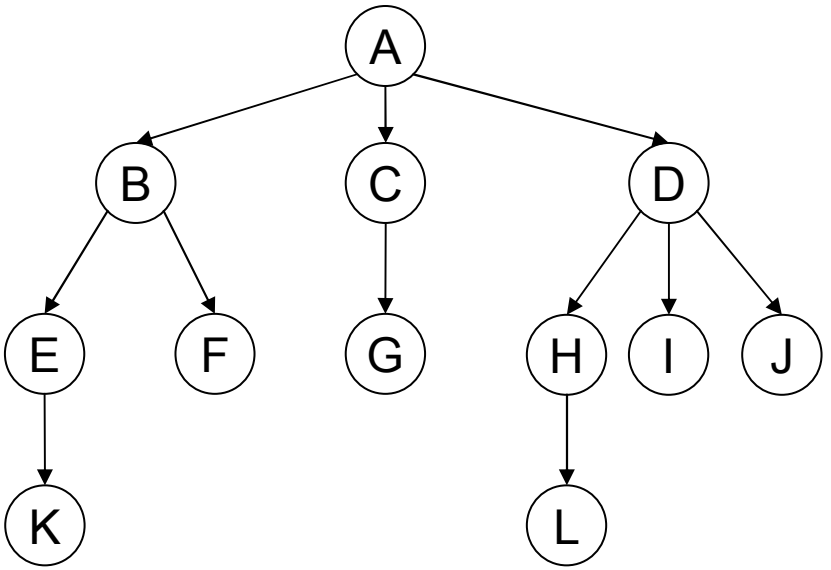


- Conjuntos aninhados



Representações

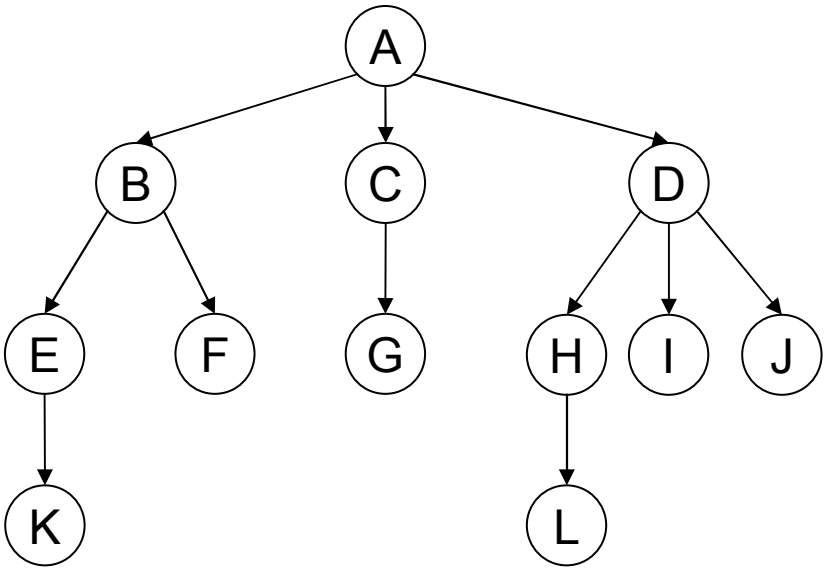
- Grafo



- Parênteses aninhados
  - ((A (B (E (K) (F)) C (G) D (H (L) (I) (J))))

Representações

- Grafo

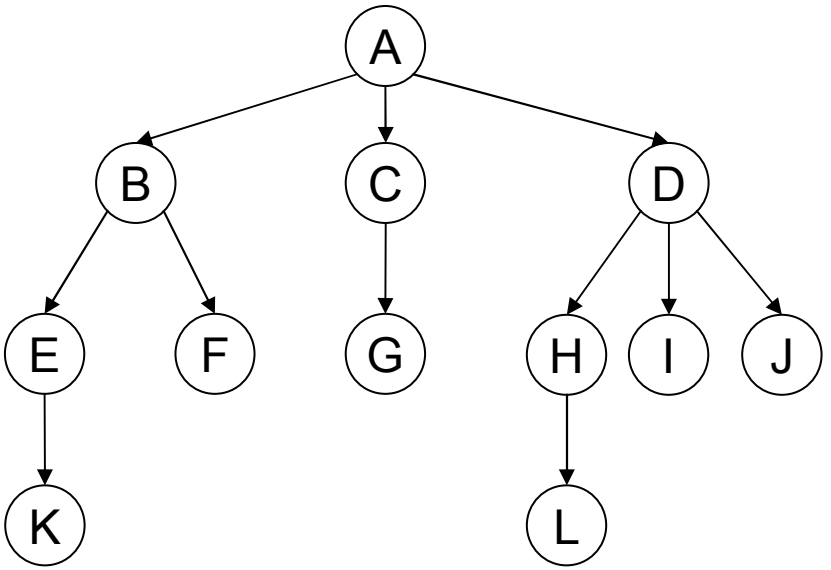


- Paragrafação

```
A
    B
        E
            K
        F
    C
        G
    D
        H
            L
        I
        J
```

Representações

- Grafo

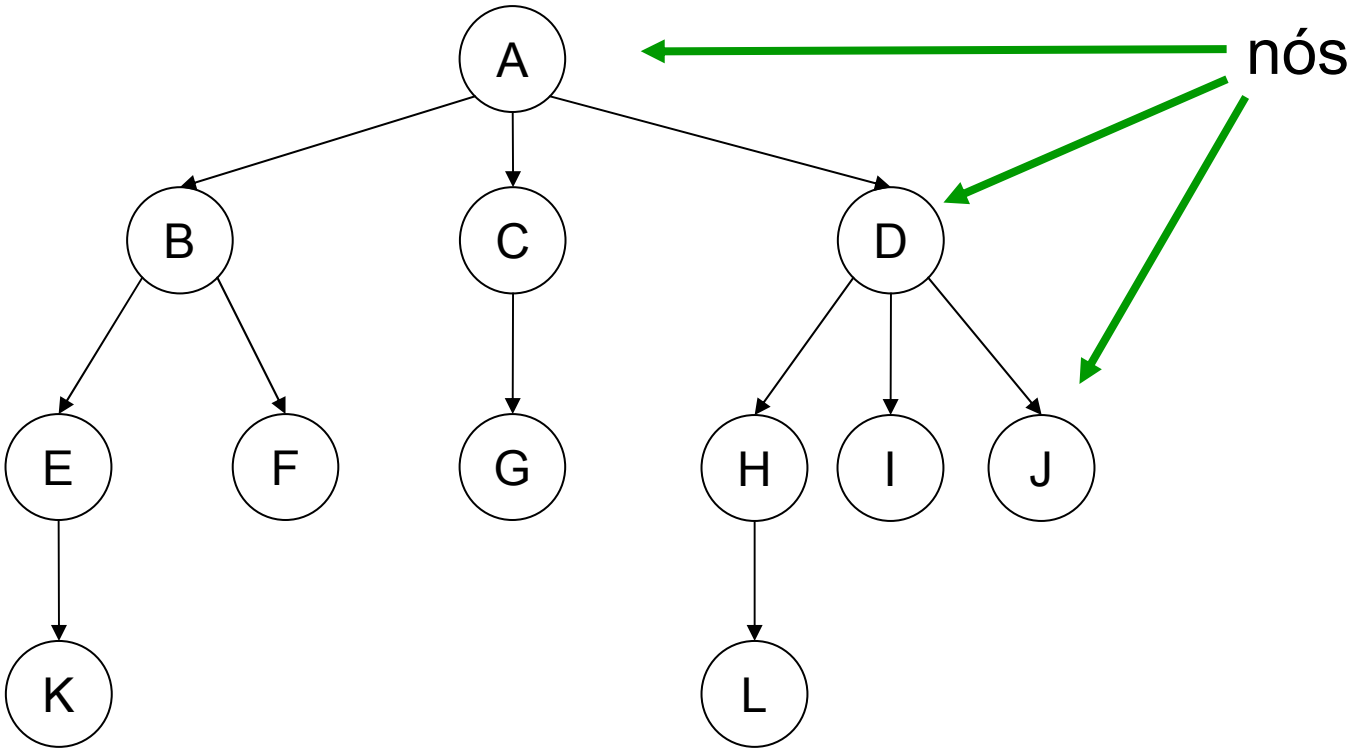


- Paragrafação

```
A
..B
....E
......K
....F
..C
....G
..D
....H
......L
....I
....J
```

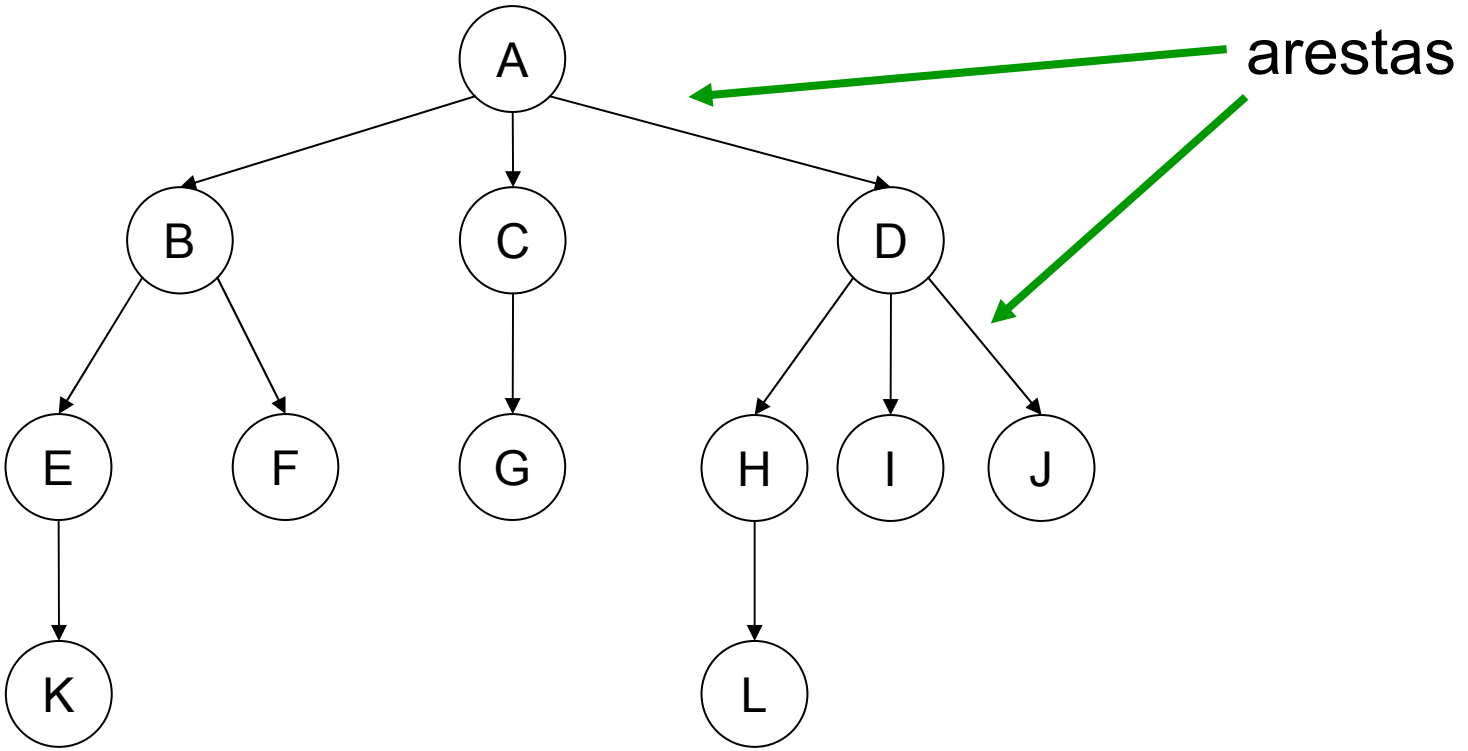
Nós (Vértices)

- Esta árvore possui 12 **nós** (ou **vértices**)



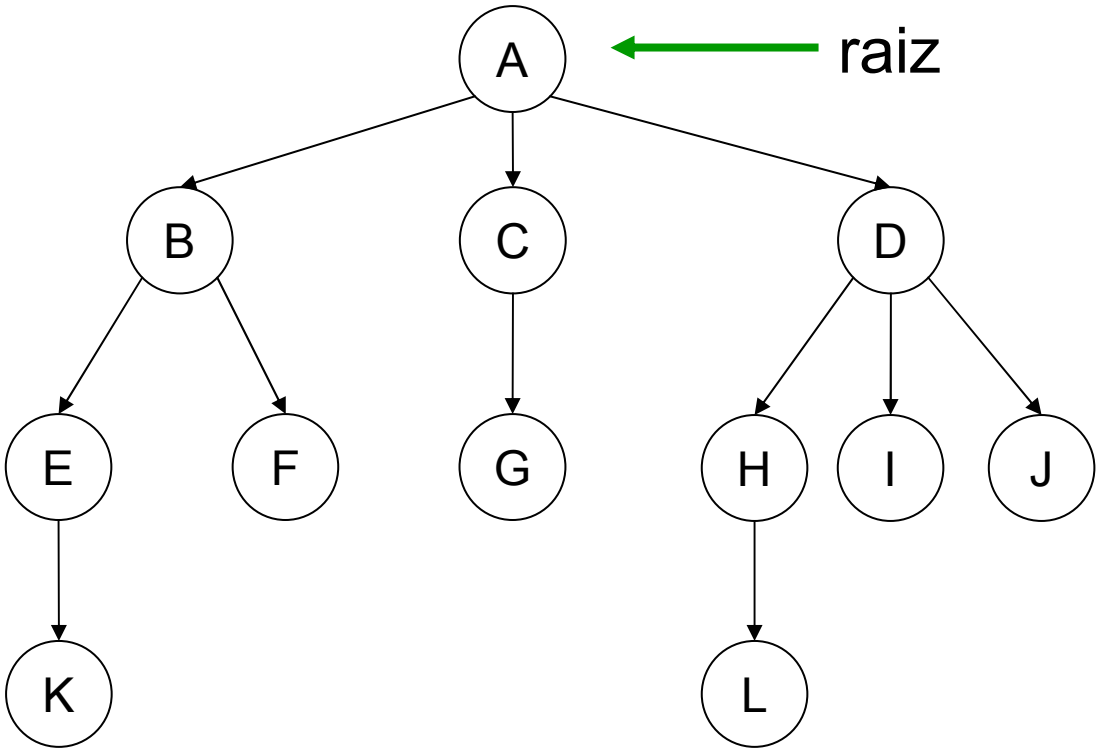
Arestas (Arcos)

- Uma **aresta** (**arco**) liga um nó a outro



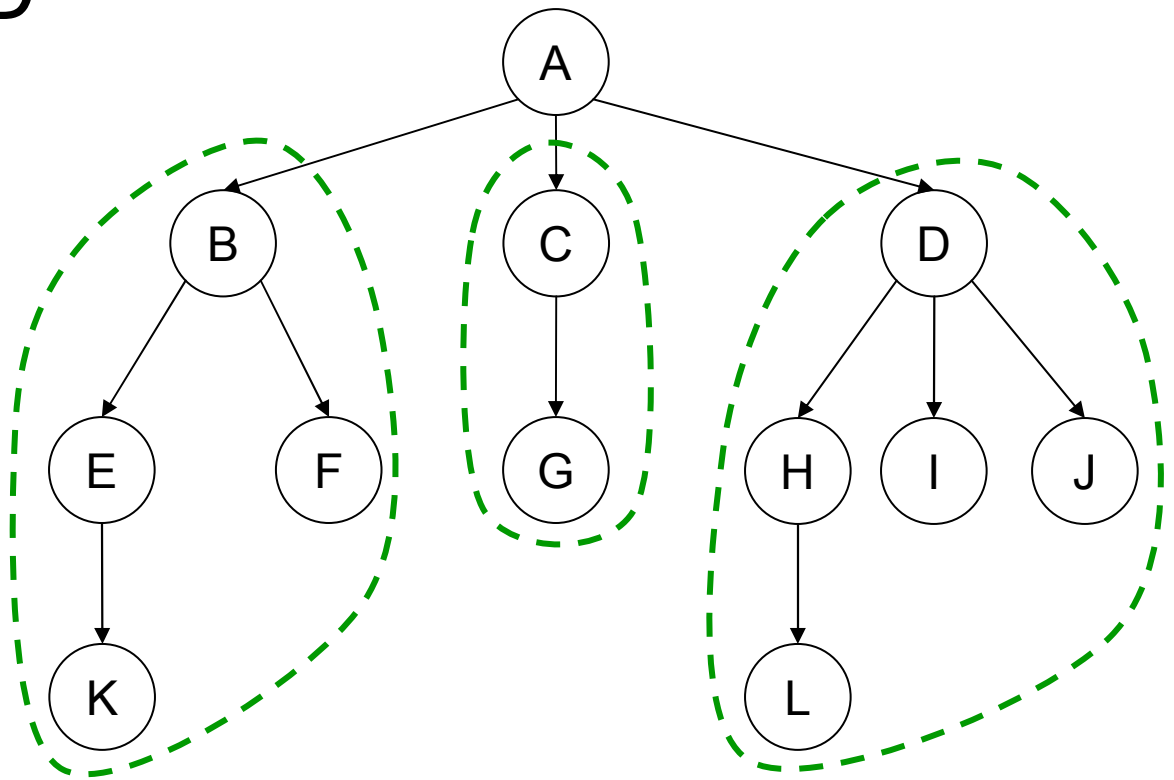
Raiz

- Normalmente as árvores são desenhadas de forma invertida, com a raiz em cima



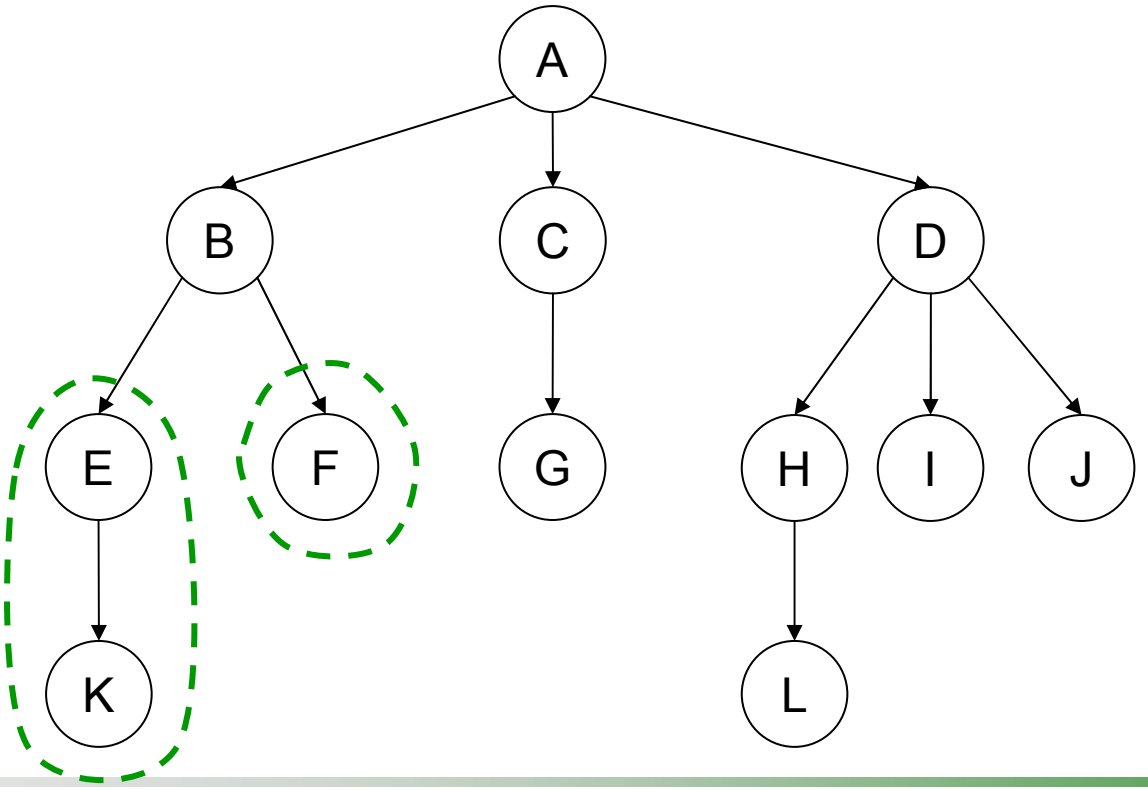
Subárvores

- No exemplo, o nó A possui três **subárvores** (*ramos*) cujas raízes são B, C e D



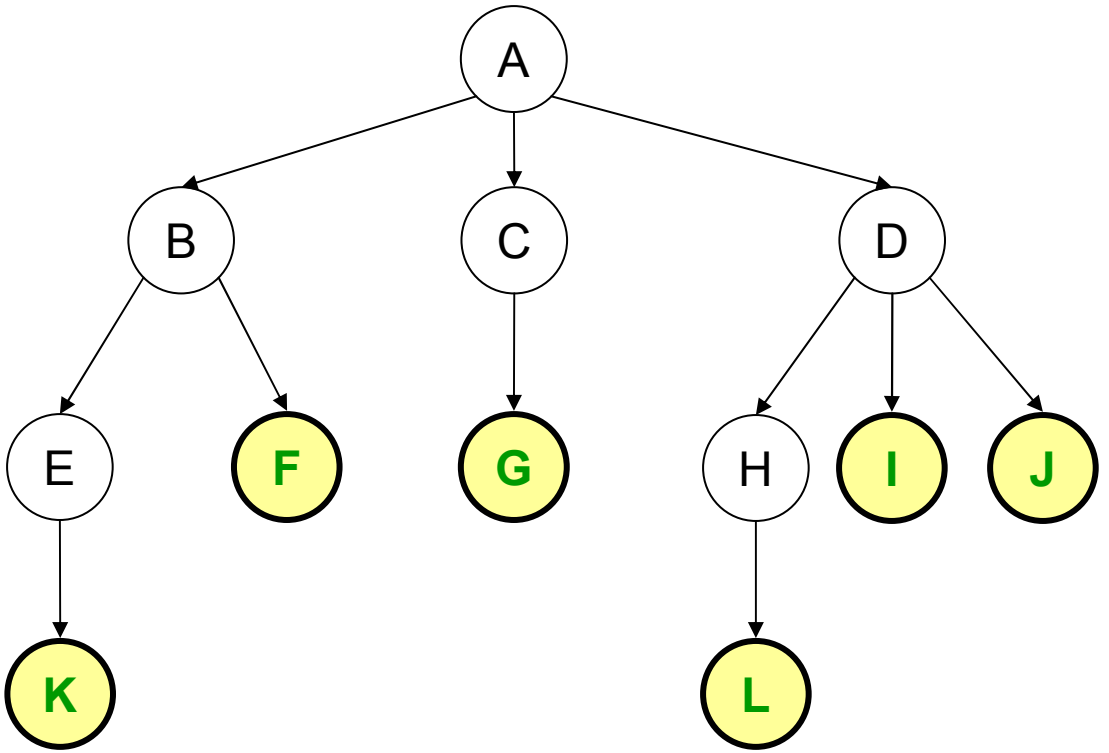
Subárvores

- No exemplo, o nó B possui duas **subárvores** (*ramos*) cujas raízes são E e F



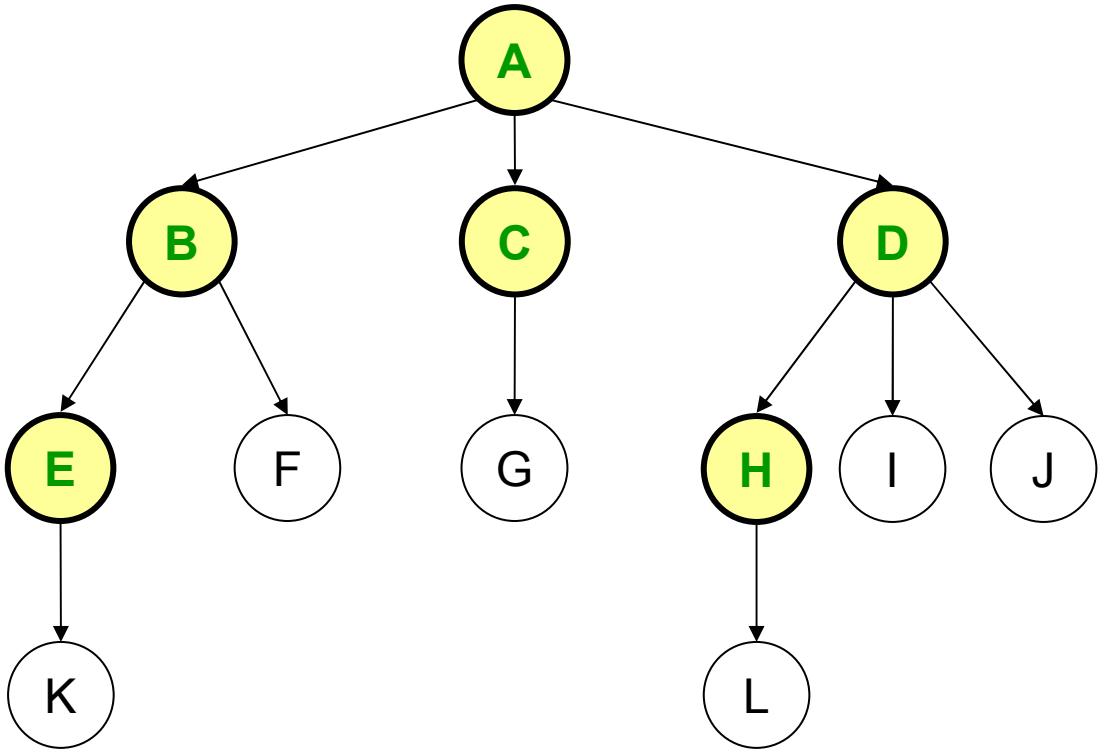
Folha

- Um **nó** sem *descendentes* (sem *filhos* ou sem *sucessores*) é denominado **terminal** ou **folha**



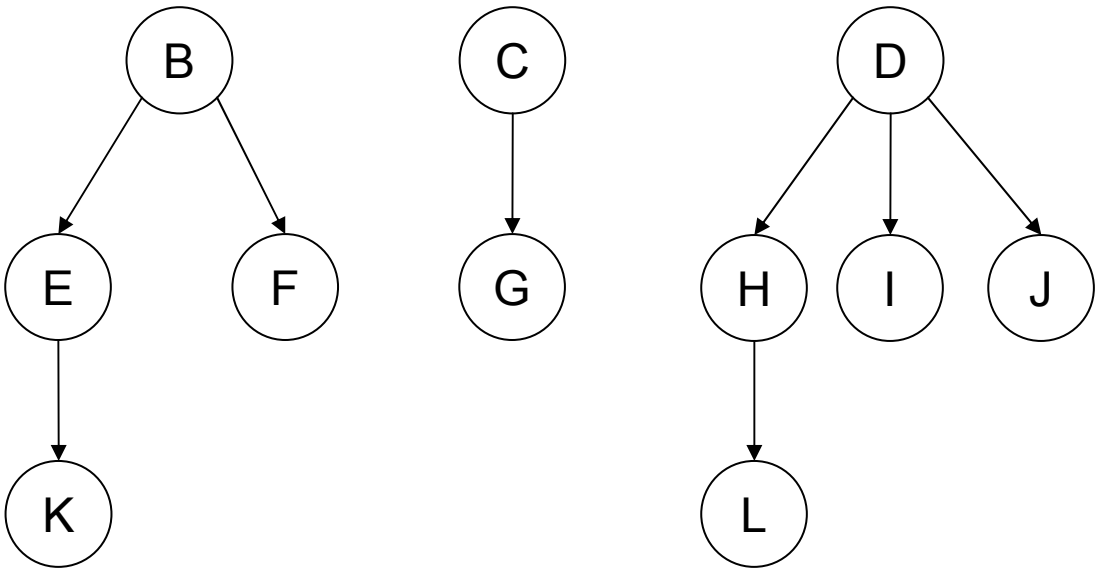
Não-Folha

- Um **nó** com *descendentes* (com *filhos* ou com *sucessores*) é denominado **não-terminal** ou **não-folha** ou **interior**



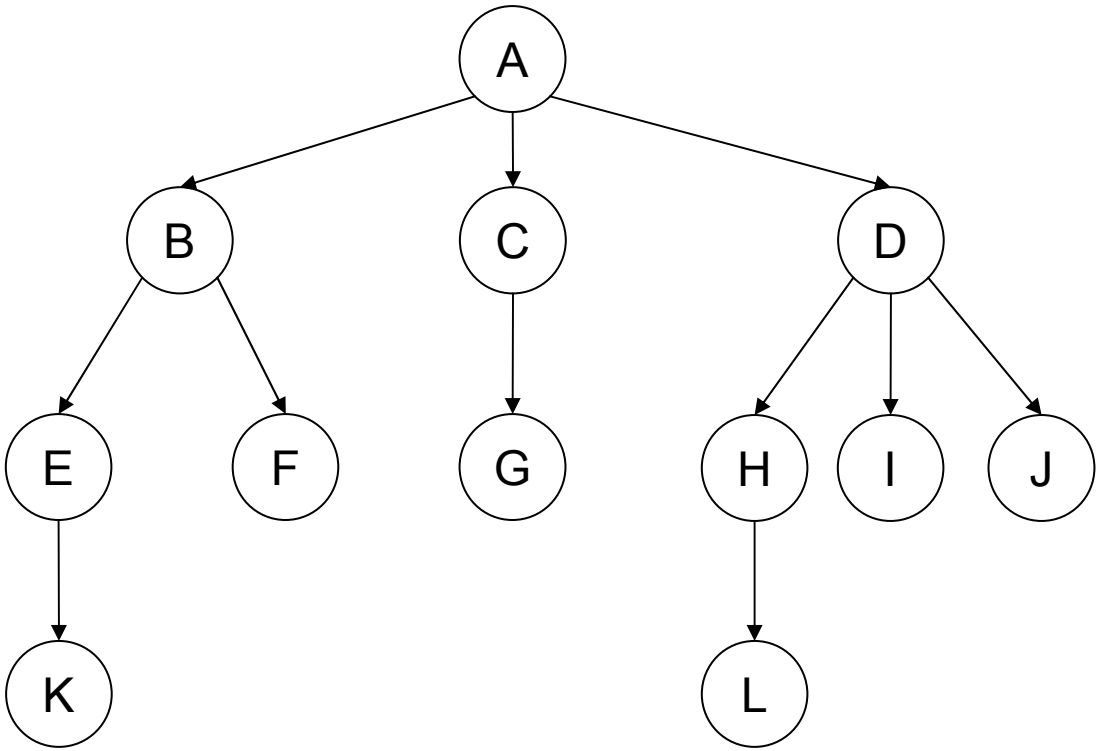
Floresta

- Uma **floresta** é um conjunto de zero ou mais árvores
- No exemplo, temos 3 árvores que compõem uma floresta



Grau de um Nó

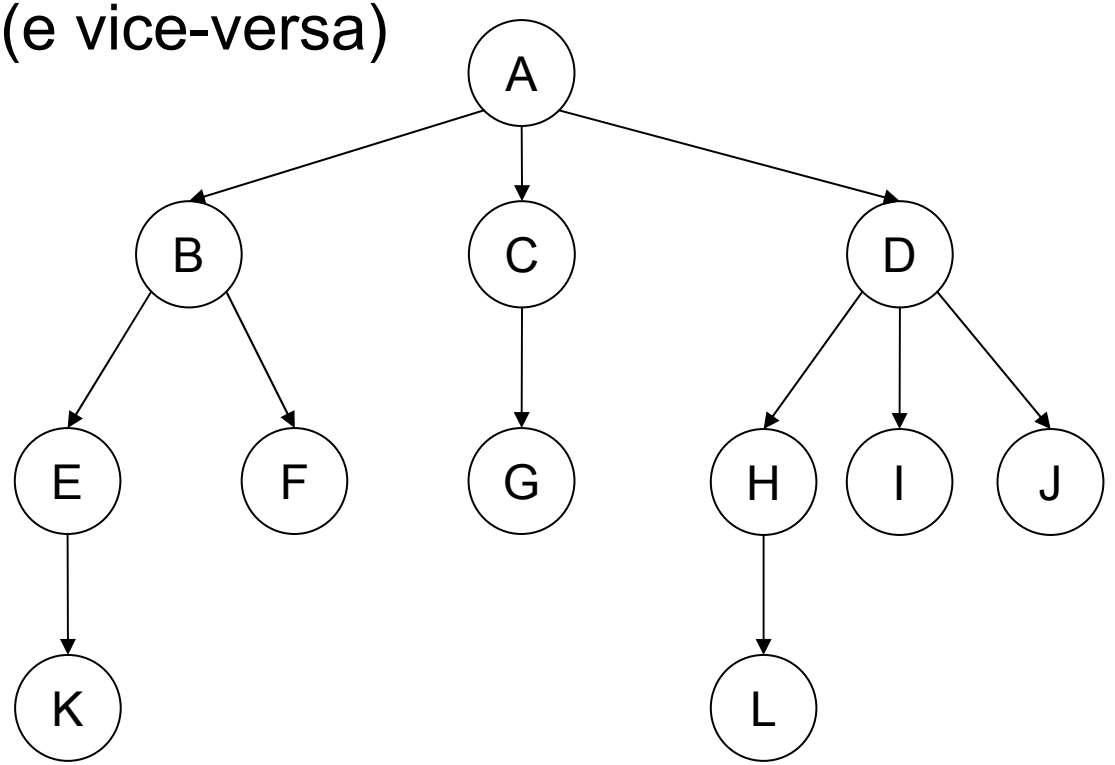
- O número de descendentes (imediatos) de um nó é denominado **grau** deste nó



Nó	Grau
A	
B	
C	
D	
E	
F	
G	
H	
I	
J	
K	
L	

Grau de um Nó

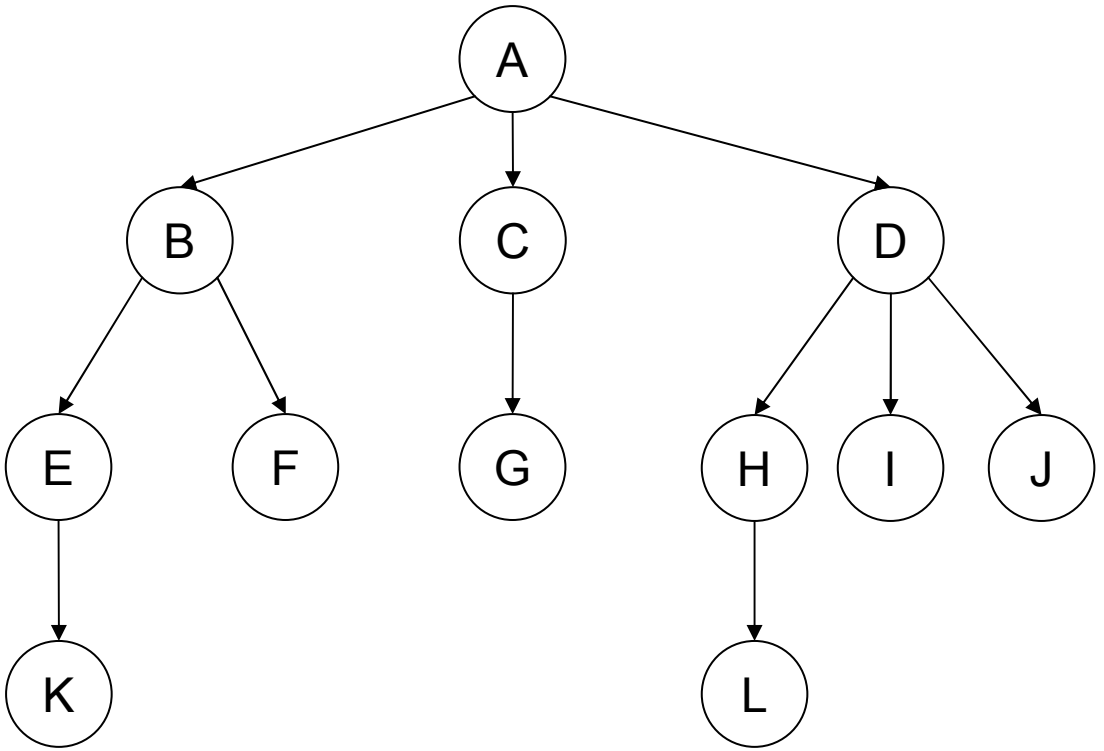
- O número de descendentes (imediatos) de um nó é denominado **grau** deste nó
- Portanto, o grau de uma folha é zero (e vice-versa)



Nó	Grau
A	3
B	2
C	1
D	3
E	1
F	0
G	0
H	1
I	0
J	0
K	0
L	0

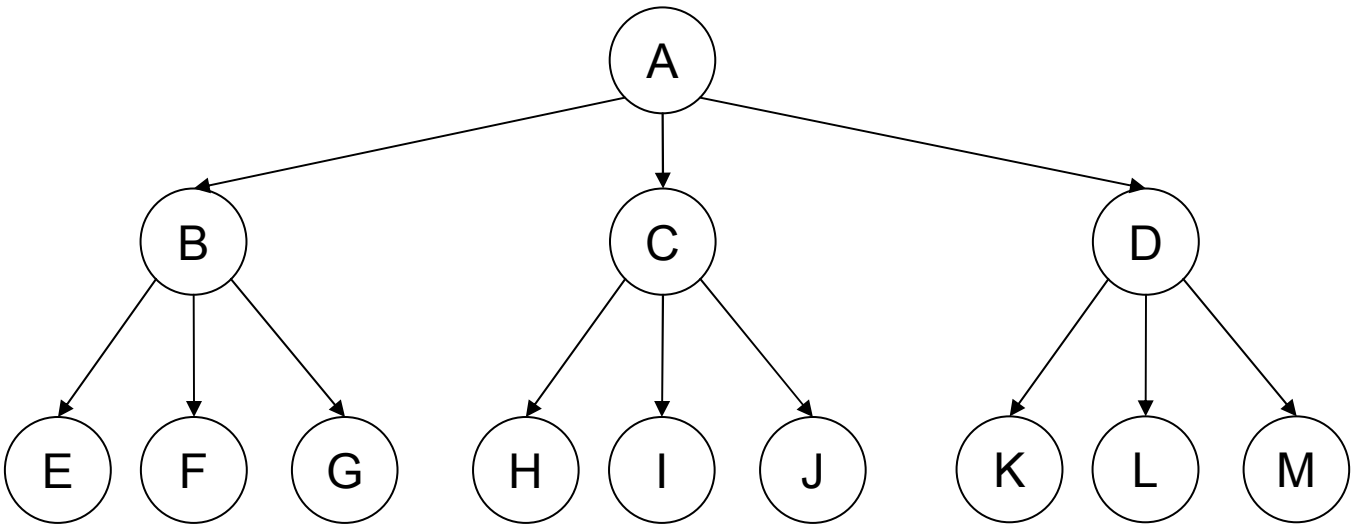
Grau de uma Árvore

- O grau máximo atingido pelos nós de uma árvore é denominado **grau** desta árvore
- No exemplo, o grau da árvore é 3



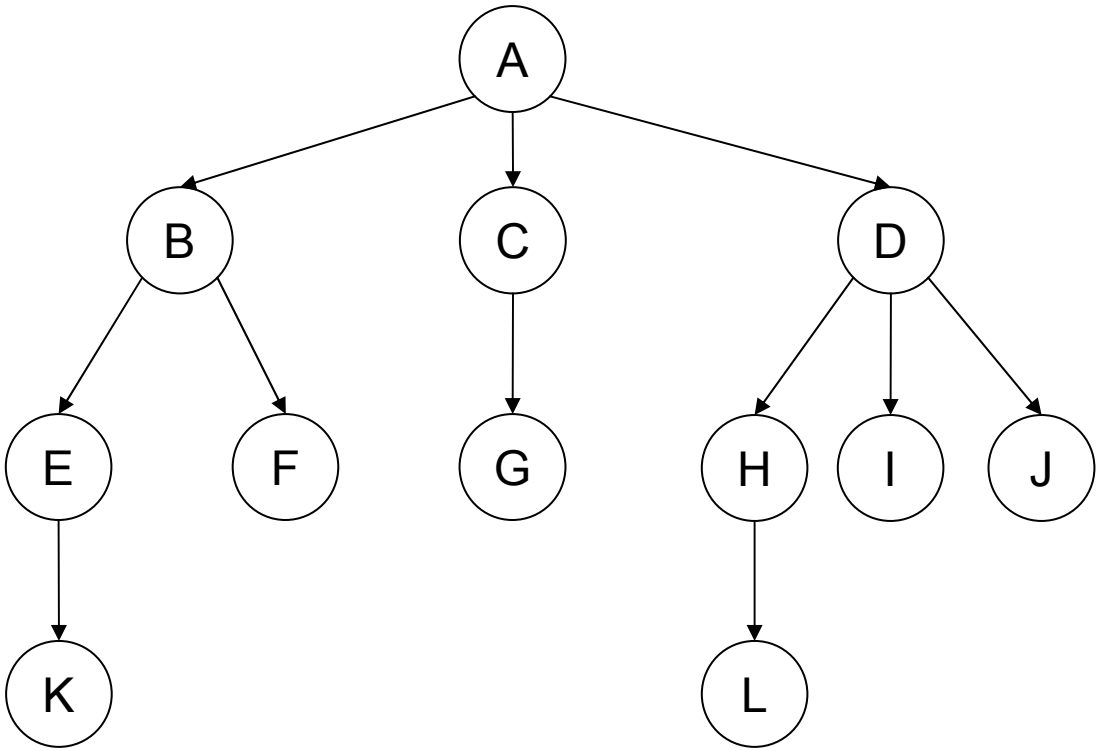
Árvore Completa

- Uma árvore de grau **d** é uma árvore **completa** (cheia) se
  - Todos os nós tem exatamente **d** filhos, exceto as folhas e
  - Todas as folhas estão na mesma altura
- No exemplo, a árvore de grau **d**=3 é completa



Pai

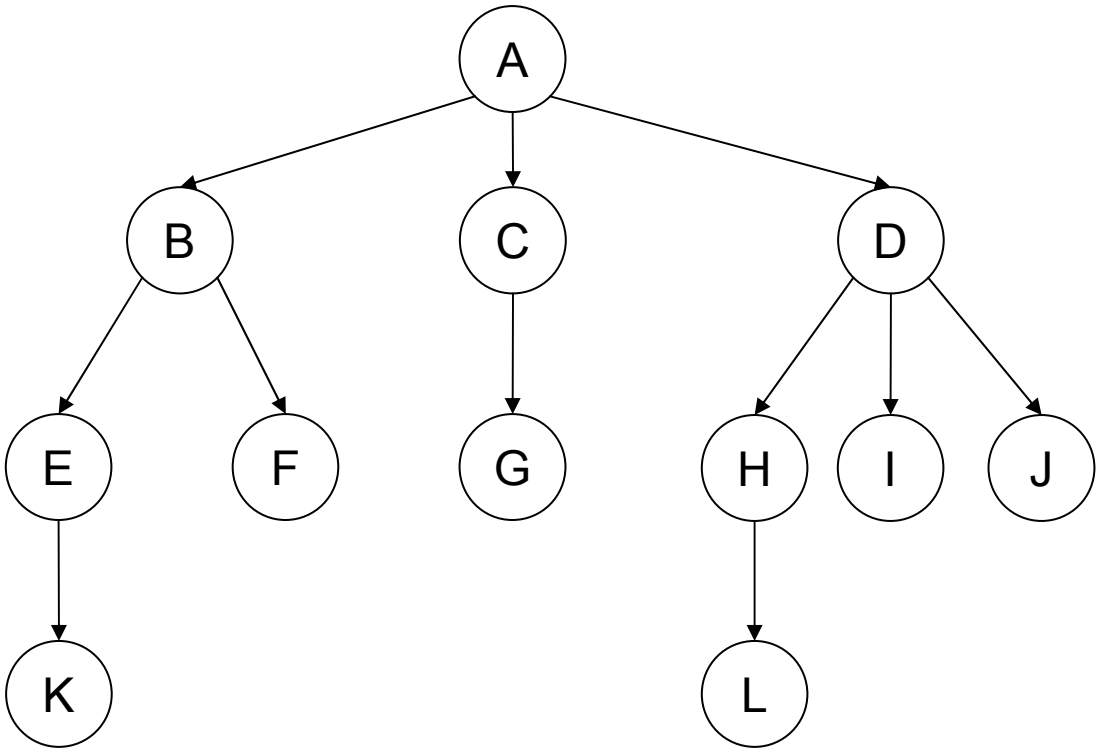
- As raízes das subárvores de um nó **X** são os **filhos** de **X**; **X** é o **pai** dos **filhos**



Nó Pai	Nós Filhos
A	B, C, D
B	E, F
C	G
D	H, I, J
E	K
F	-
G	-
H	L
I	-
J	-
K	-
L	-

Irmão

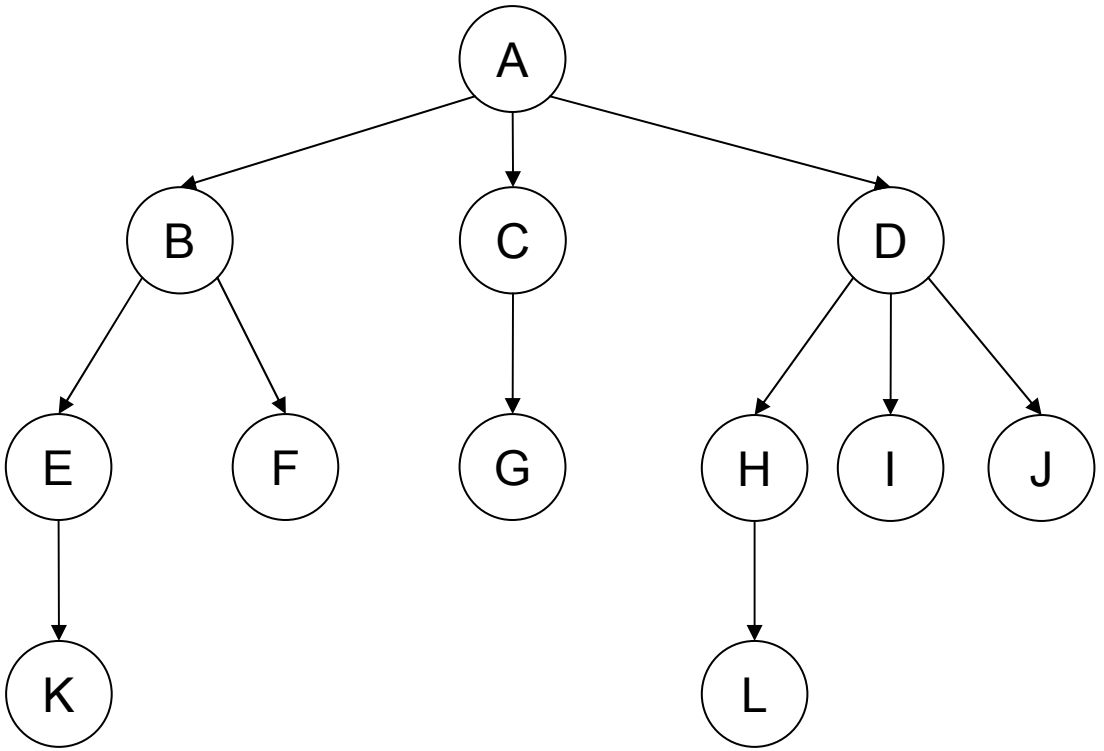
- Os filhos (descendentes) de um mesmo nó pai (antecessor) são denominados **irmãos**



Irmãos
B, C, D
E, F
H, I, J

Avô & Demais Parentes

- Podemos estender essa terminologia para **avô**, **bisavô**, e demais parentes



Nós	Avô
E,F,G,H,I,J	A
K	B
L	D

Nós	Bisavô
K, L	A

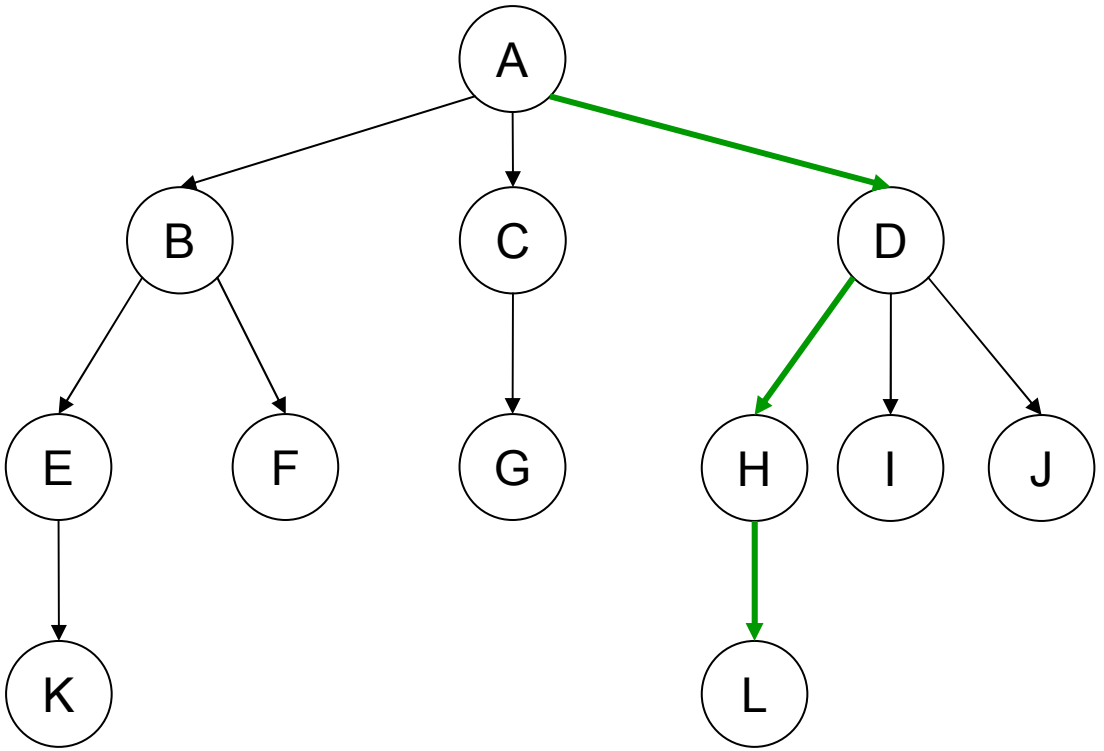
Caminho

- Uma seqüência de nós distintos v_1, v_2, ..., v_k tal que sempre existe a relação
  - "v_i é filho de v_{i+1}" ou "v_i é pai de v_{i+1}", $1 \leq i < k$

  é denominada um **caminho** entre v_1 e v_k
- Diz-se que v_1 **alcança** v_k ou que v_k é **alcançado** por v_1
- Um caminho de *k* vértices v_1, v_2, ..., v_k é formado pela seqüência de *k*-1 pares de nós (v_1,v_2), (v_2,v_3), ..., (v_{k-2},v_{k-1}), (v_{k-1},v_k)
  - *k*-1 é o **comprimento** do caminho
  - Cada par (v_i, v_{i+1}) é uma **aresta** ou **arco**, $1 \leq i < k$

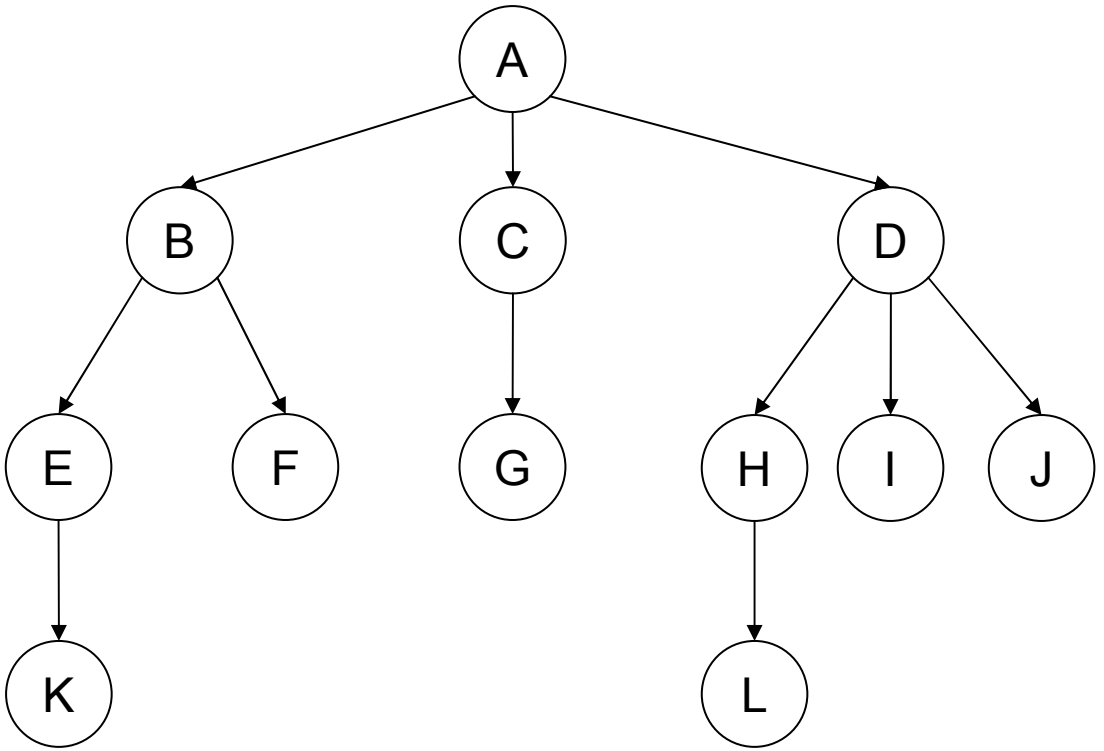
Caminho

- No Exemplo:
  - A, D, H, L é um caminho entre A e L, formando pela seqüência de arestas (A,D), (D,H), (H,L)
  - O comprimento do caminho entre A e L é 3



Antecessores

- Os **antecessores** (**antepassados**) de um nó são todos os nós no caminho entre a raiz e o respectivo nó
- No exemplo, os antecessores de L são A, D e H

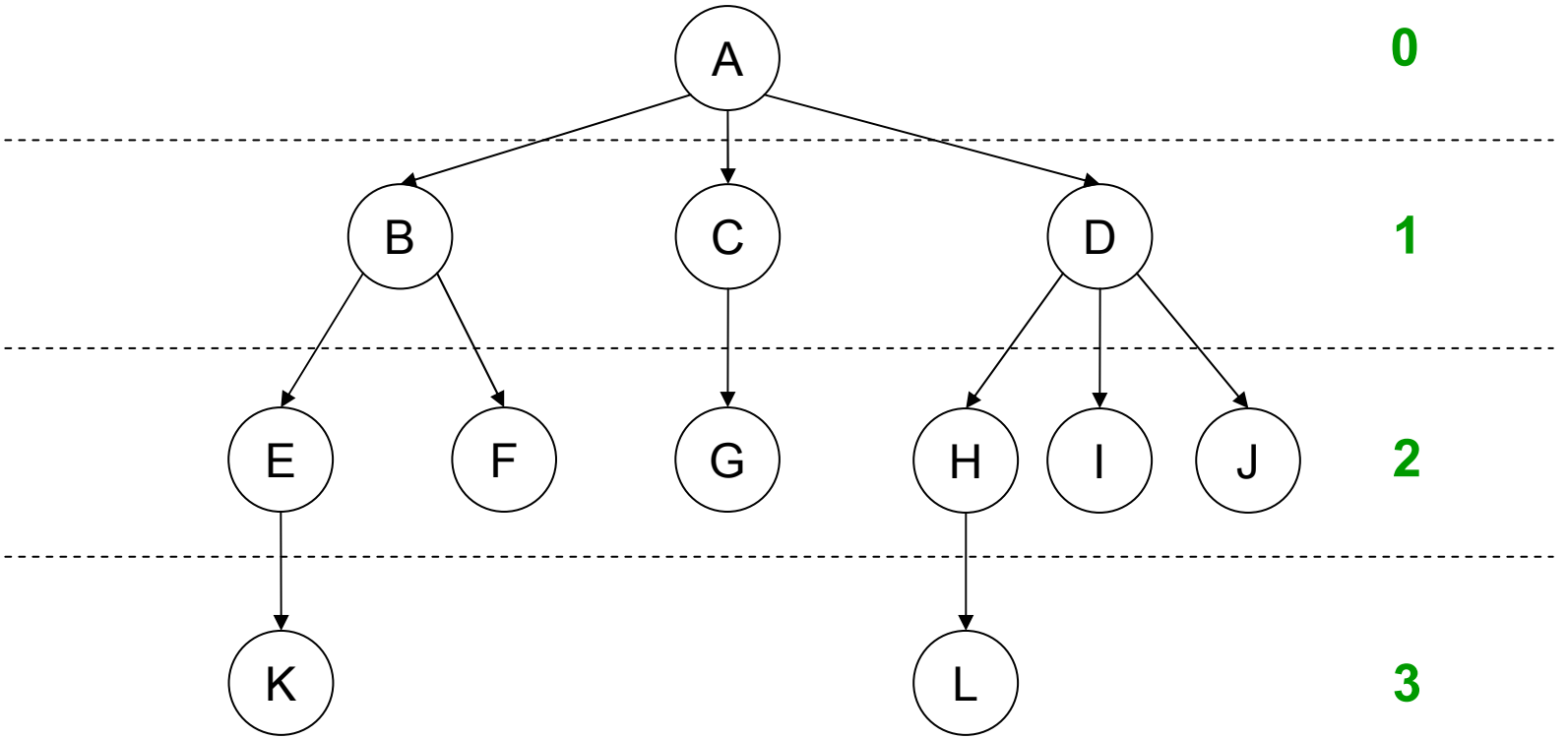


Nível

- O **nível** (ou **profundidade**) de um nó é definido admitindo-se que a raiz está no nível zero (nível um)
- Estando um nó no **nível i**, seus filhos estarão no **nível i+1**
- Não existe um padrão quanto ao nível adotado para a raiz, que determina o nível dos demais nós
- Assim, a raiz pode ser admitida como estando
  - No **nível zero**
  - Alternativamente, no **nível um**
- No restante desta apresentação, vamos adotar a raiz no nível zero
  - A adequação das fórmulas e algoritmos caso a raiz seja considerada no nível um é deixada como exercício

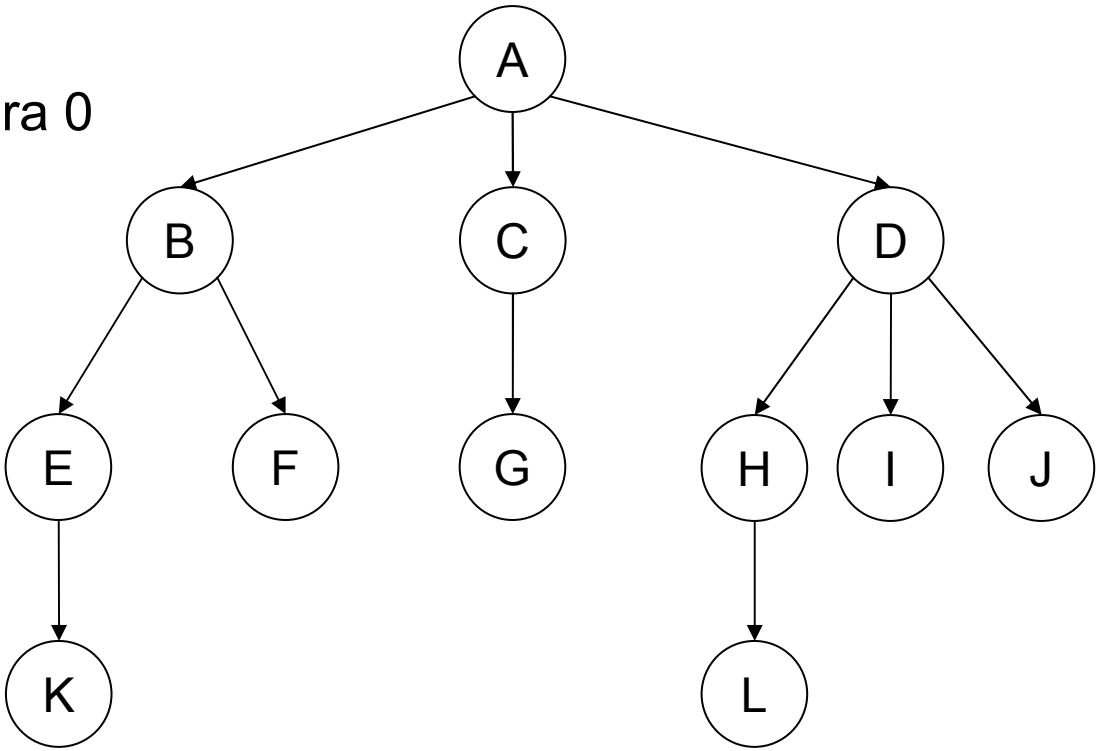
Nível

- No exemplo, os nós:
  - B, C e D estão no nível 1
  - K e L estão no nível 3



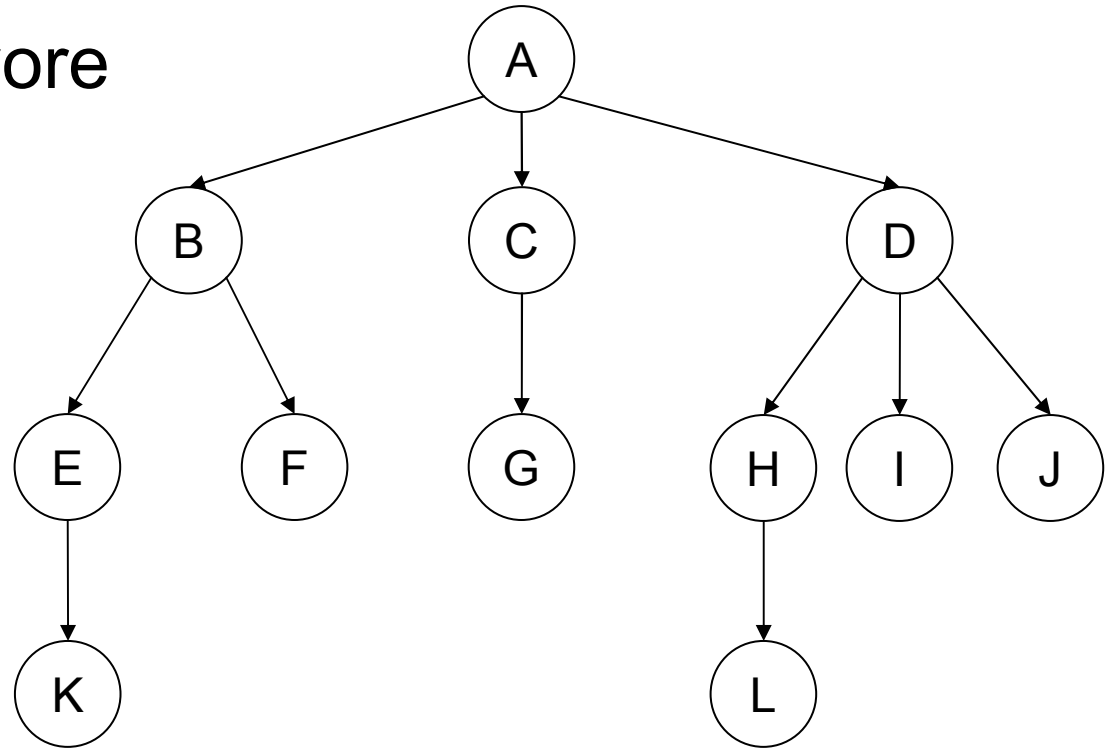
Altura de um Nó

- A **altura de um nó** é o número de arestas no maior caminho desde o nó até um de seus descendentes
- Portanto, as folhas têm altura zero
- No exemplo, os nós:
  - K, F, G, L, I, J têm altura 0
  - E, C e H têm altura 1
  - B e D têm altura 2
  - A tem altura 3



Altura de uma Árvore

- A **altura** (ou **profundidade**) **de uma árvore** é o nível máximo entre todos os nós da árvore ou, equivalentemente, é a altura da raiz
- No exemplo, a árvore possui altura 3

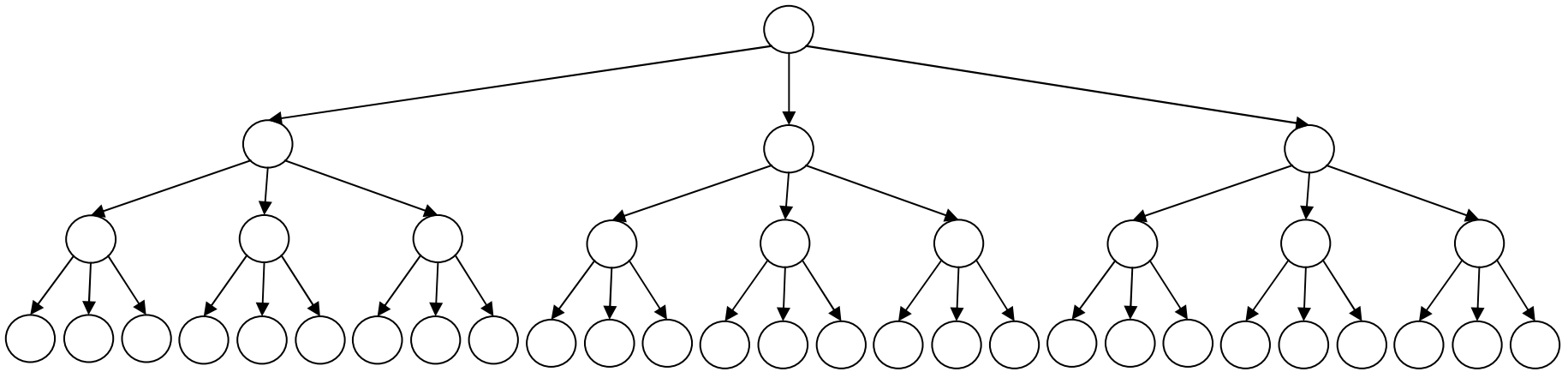


Número Máximo de Nós

- O número máximo de nós **n(h,d)** em uma árvore de altura **h** é atingido quando todos os nós possuírem **d** subárvores, exceto os de nível **h**, que não possuem subárvores
- Para uma árvore de grau **d**
  - Nível 0 contém d^0 (um) nó (raiz)
  - Nível 1 contém d^1 descendentes da raiz
  - Nível 2 contém d^2 descendentes
  - ...
  - Nível i contém d^i descendentes

Número Máximo de Nós

- Assumindo **d**=3
  - Nível 0: 1 nó (raiz)
  - Nível 1: 3 nós
  - Nível 2: 3^2 = 9 nós
  - Nível 3: 3^3 = 27 nós
- n(3,3)= 1 + 3 + 9 + 27 = 40 nós



Número Máximo de Nós

- Portanto, o número máximo de nós **n=n(h,d)** é soma do número de nós em cada nível, ou seja:

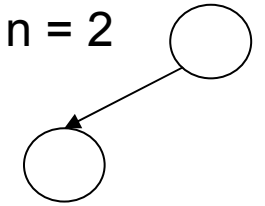
$$n = n(h,d) = \sum_{i=0}^{h} d^i = d^0 + d^1 + d^2 + \cdots + d^h$$

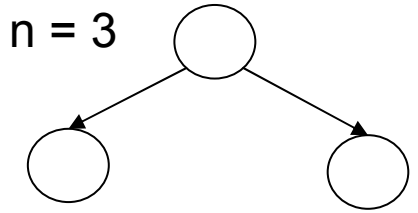
$$\sum_{i=0}^{h} d^i = \frac{d^{h+1} - 1}{d - 1}, \; d > 1$$

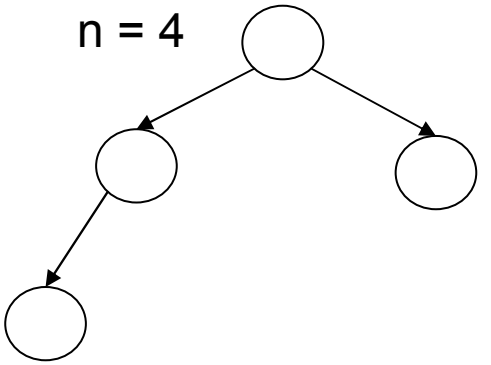
Árvores (Perfeitamente) Balanceadas

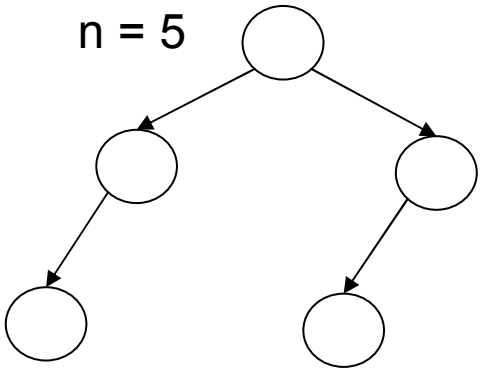
- Uma árvore é **balanceada** se, para cada nó, a ***altura*** de suas subárvores diferem, no máximo, de uma unidade
- Uma árvore é **perfeitamente balanceada** se, para cada nó, os ***números de nós*** em suas subárvores diferem, no máximo, de uma unidade
- Todas as árvores perfeitamente balanceadas também são árvores balanceadas

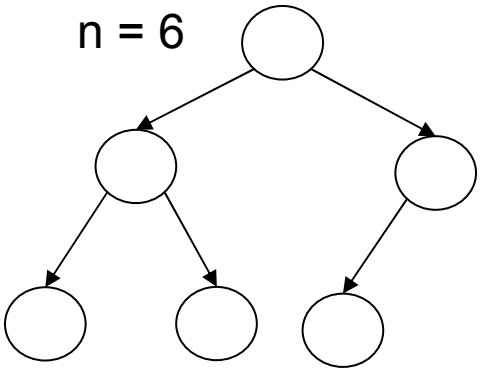
Árvores Perfeitamente Balanceadas de Grau 2

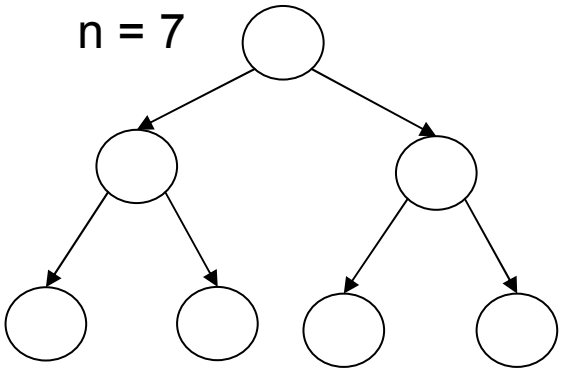




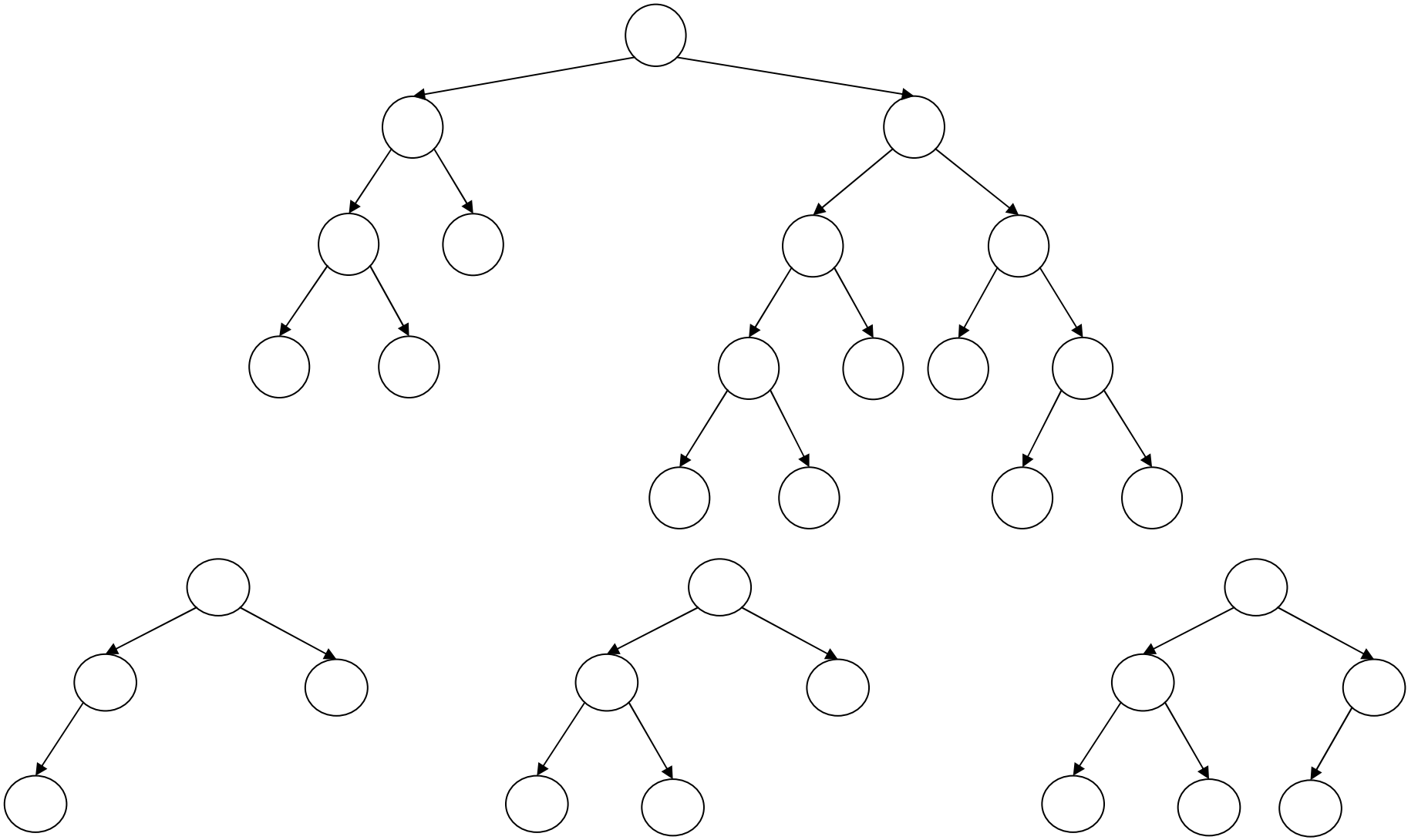






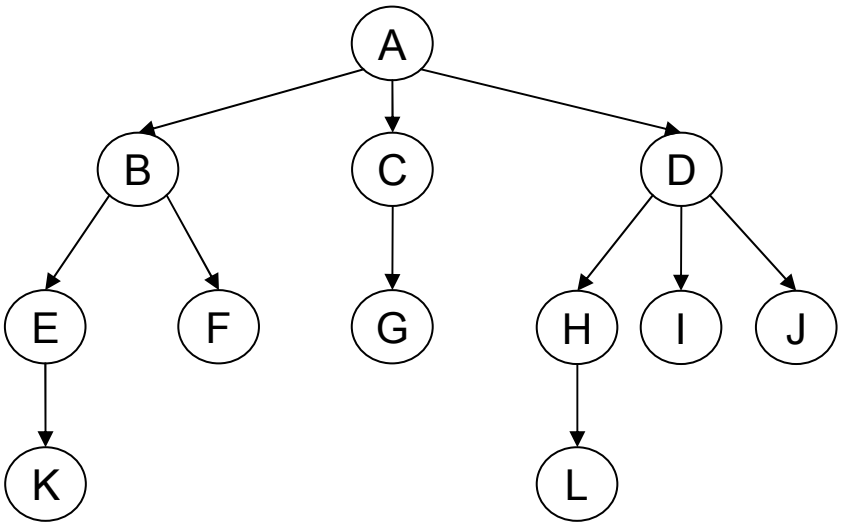


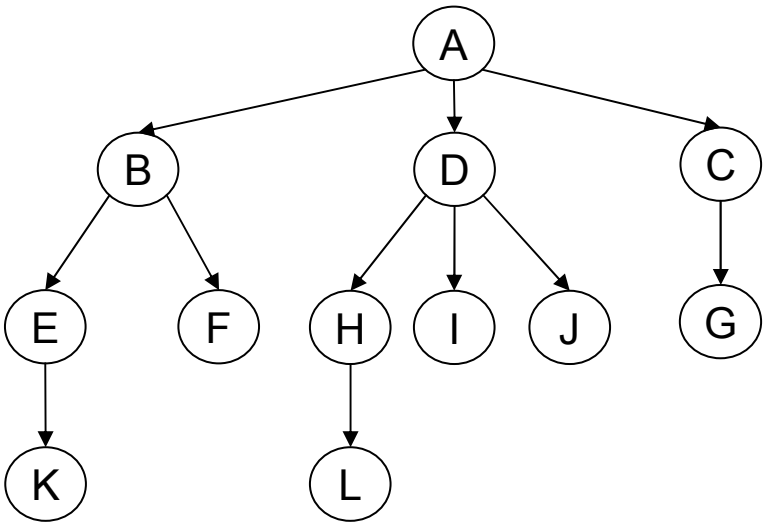
Árvores Balanceadas de Grau 2



Árvore Orientada

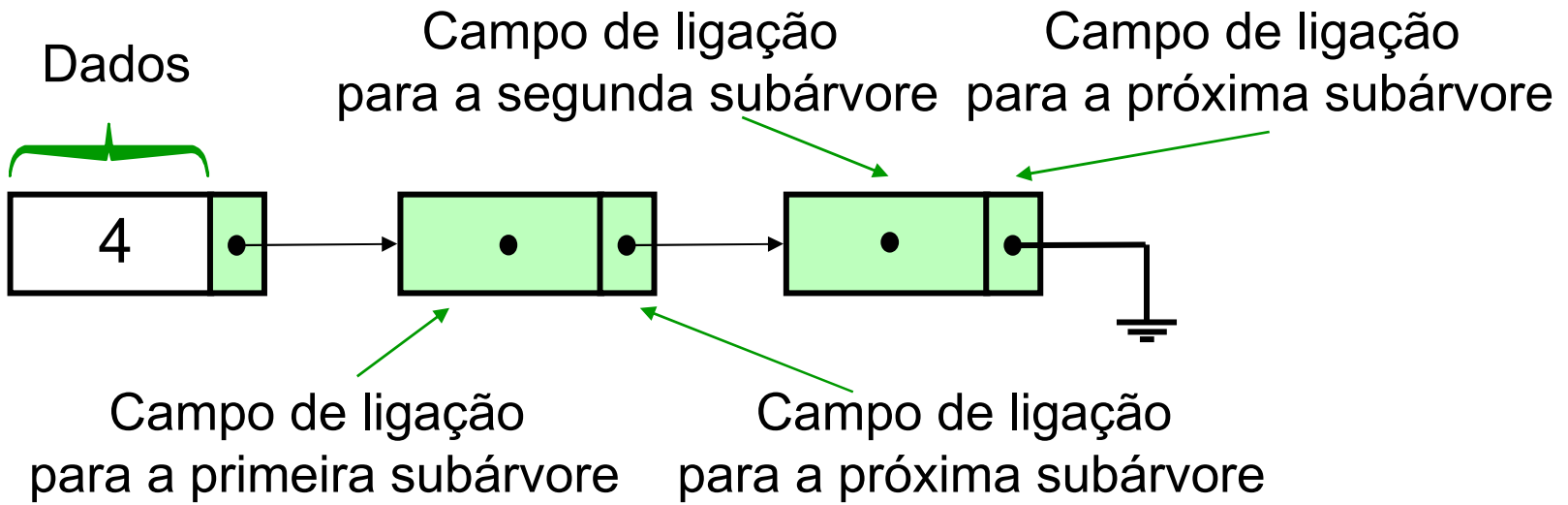
- Uma árvore **orientada** (**ordenada**) é uma árvore na qual os filhos de cada nó são orientados (ordenados)
- A orientação é da esquerda para a direita
- As duas árvores orientadas seguintes são distintas





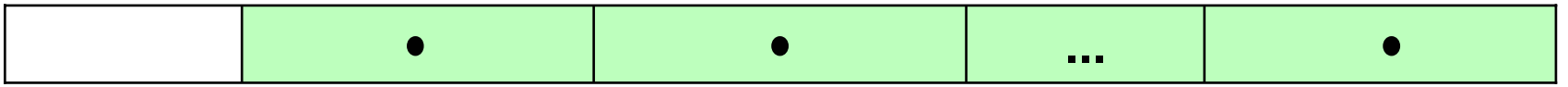
Implementação de Árvores

- Árvores podem ser implementadas utilizando listas encadeadas
  - Cada nó possui um campo de informação e uma série de campos de ligação, de acordo como número de filhos daquele nó



Implementação de Árvores

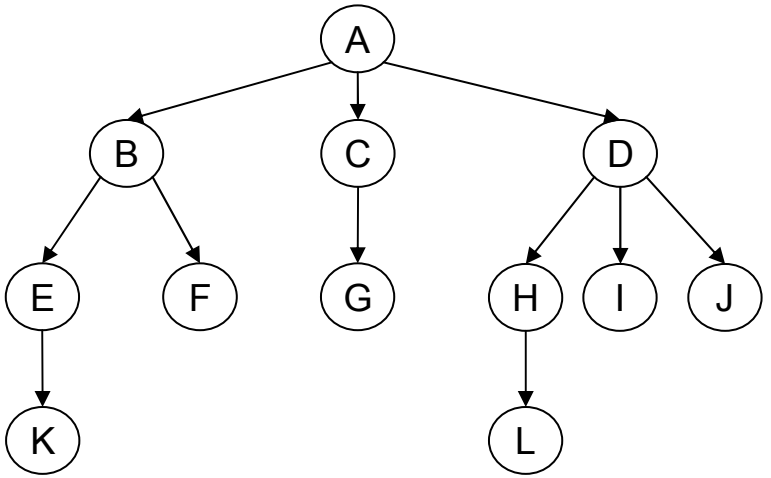
- Entretanto, é mais simples o caso em que cada nó tem um número máximo de filhos *d* pré-estabelecido



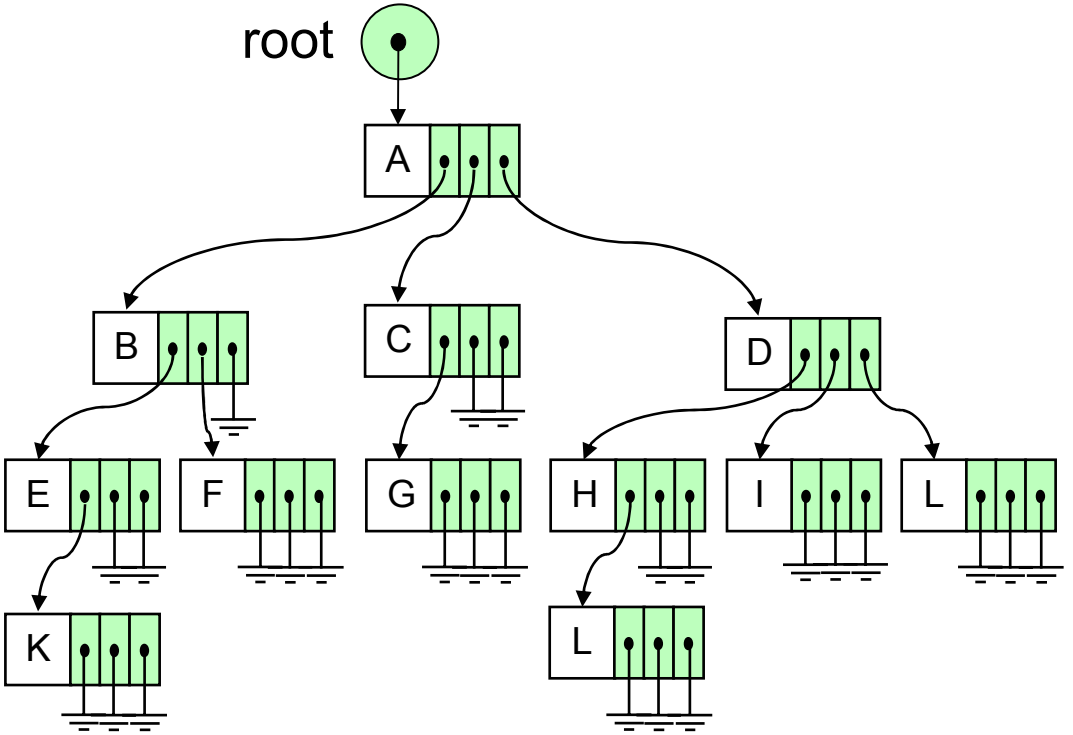
Dados	Campo de ligação para a primeira subárvore	Campo de ligação para a segunda subárvore		Campo de ligação para a *d*-ésima subárvore

Implementação de Árvores

- Por exemplo, a árvore ternária seguinte (d=3)...

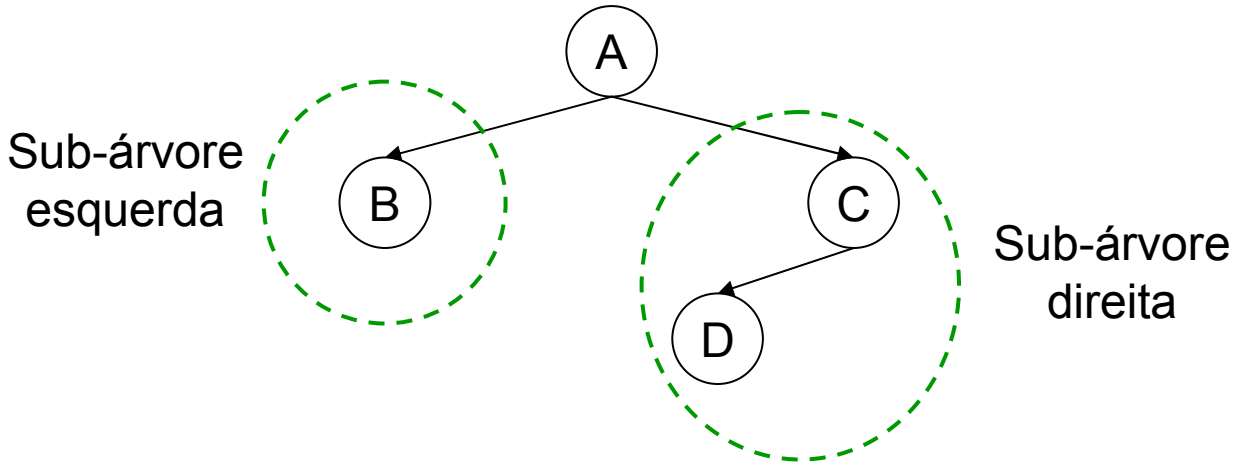


- ... pode ser implementada como



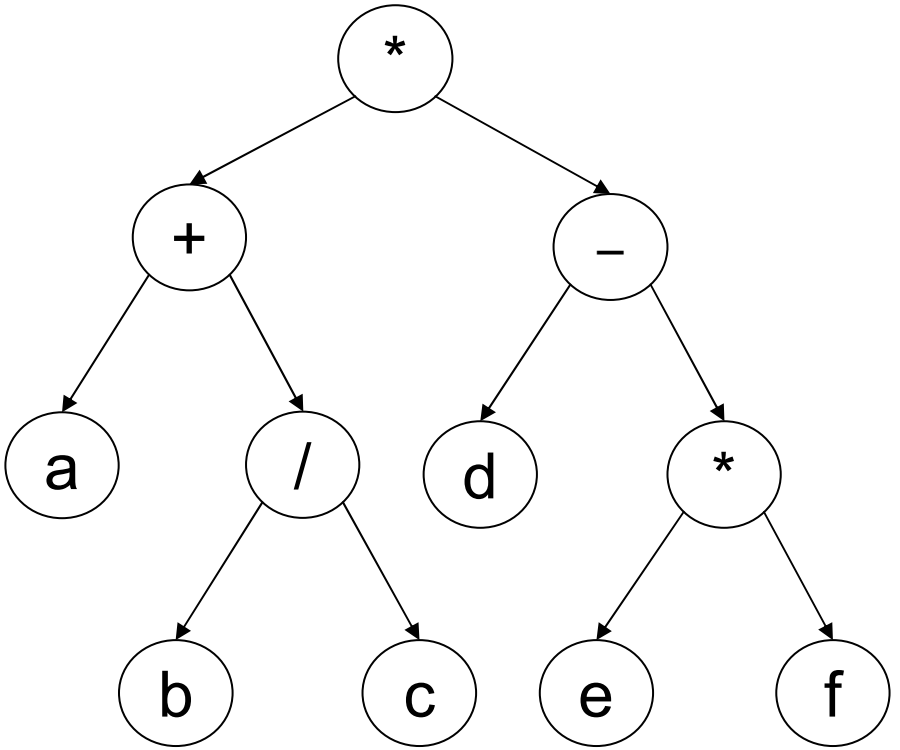
Árvores Binárias (AB)

- **Árvores binárias** são árvores orientadas de grau 2
- Uma árvore binária é uma estrutura que é ou vazia ou possui 3 componentes:
  - Uma raiz
  - Uma subárvore esquerda
  - Uma subárvore direita
- As subárvores devem ser árvores binárias



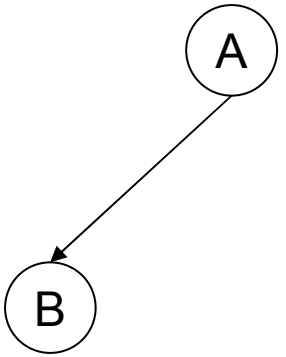
Árvores Binárias

- Podemos, por exemplo, representar uma expressão aritmética (com operadores binários) por meio de uma AB, na qual cada operador é um nó da árvore e seus dois operandos representados como subárvores
- A árvore ao lado representa a expressão (a+b/c)*(d-e*f)

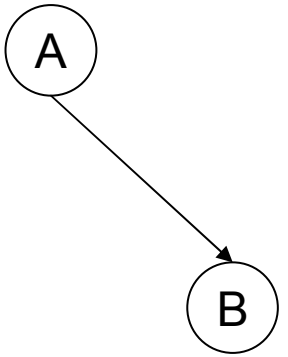


Árvores Binárias

- As duas AB seguintes são distintas
  - (i) a primeira tem subárvore direita vazia
  - (ii) a segunda tem subárvore esquerda vazia



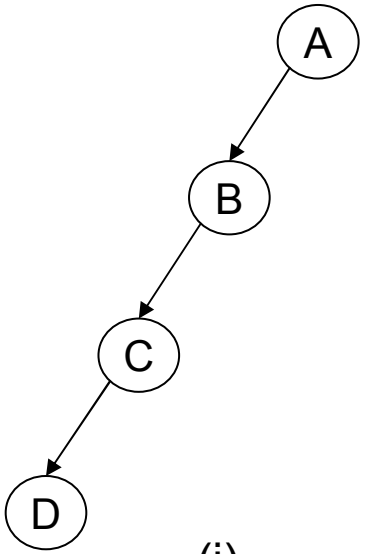
(i)



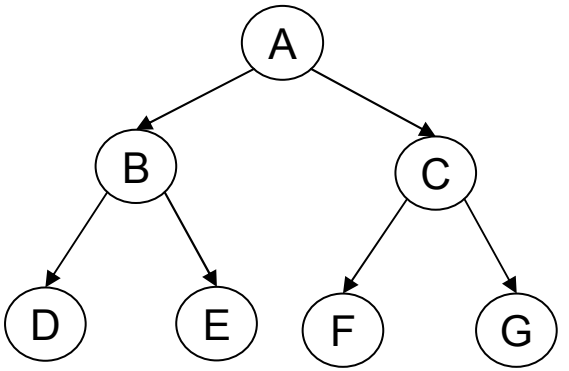
(ii)

Árvores Binárias

- Exemplos de AB
- (i) assimétrica à esquerda (degenerada)
- (ii) completa



(i)



(ii)

Árvores Binárias

- O número de máximo de nós em uma árvore binária de altura **h** é dado por:

$$n = n(h,2) = \sum_{i=0}^{h} 2^i = 2^{h+1} - 1$$

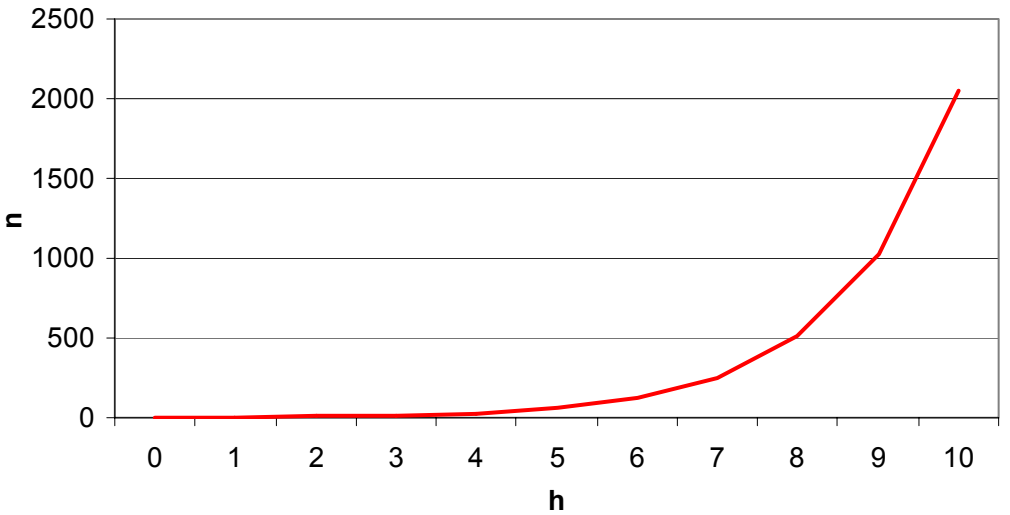
- Portanto, **n** elementos podem ser organizados em uma árvore binária de altura mínima ≈ $\log_2$ **n**

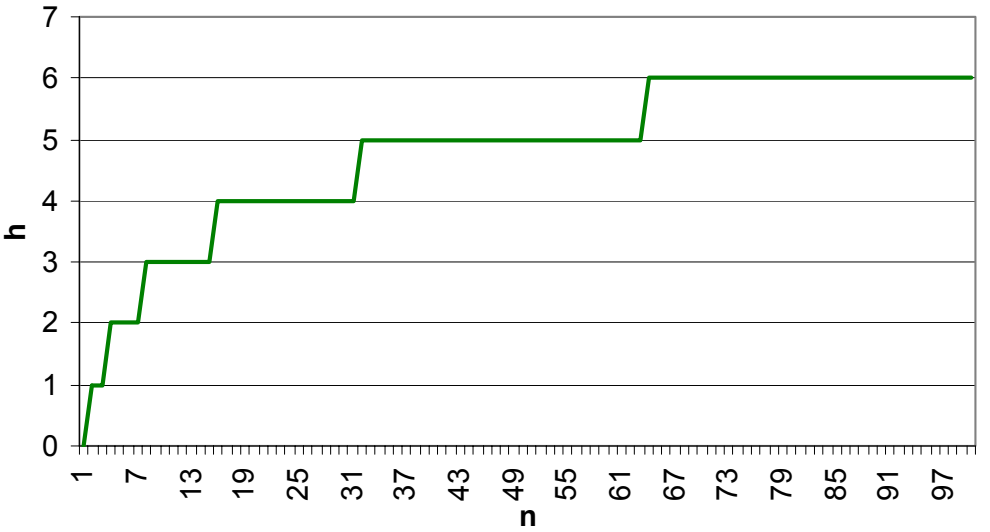
$$h = \lfloor \log_2 (n+1) - 1 \rfloor$$

Árvores Binárias de Altura Mínima

h	n
0	1
1	3
2	7
3	15
4	31
5	63
6	127
7	255
8	511
9	1023
10	2047

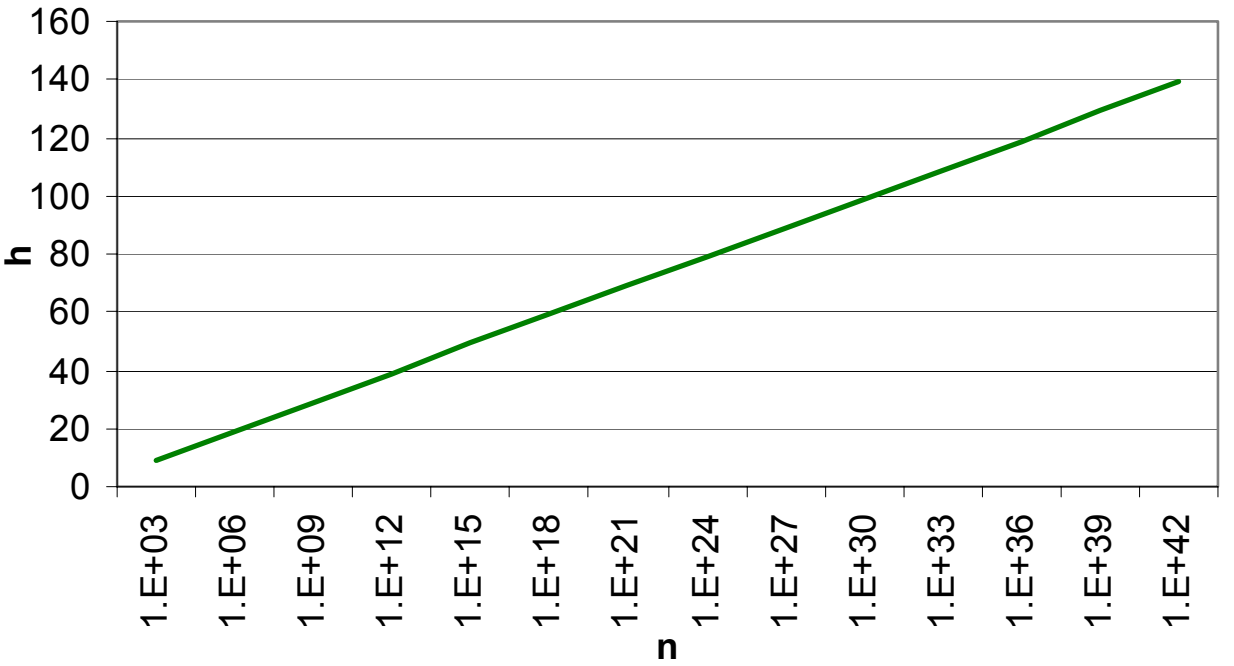
n	h
1	0
2	1
3	1
4	2
5	2
6	2
7	2
8	3
9	3
10	3
11	3
12	3
13	3
14	3
15	3
16	4





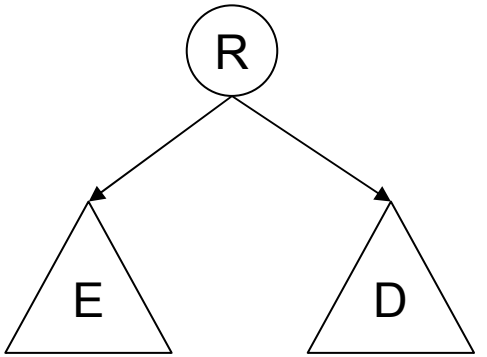
Árvores Binárias de Altura Mínima

n	h
1.E+03	9
1.E+06	19
1.E+09	29
1.E+12	39
1.E+15	49
1.E+18	59
1.E+21	69
1.E+24	79
1.E+27	89
1.E+30	99
1.E+33	109
1.E+36	119
1.E+39	129
1.E+42	139



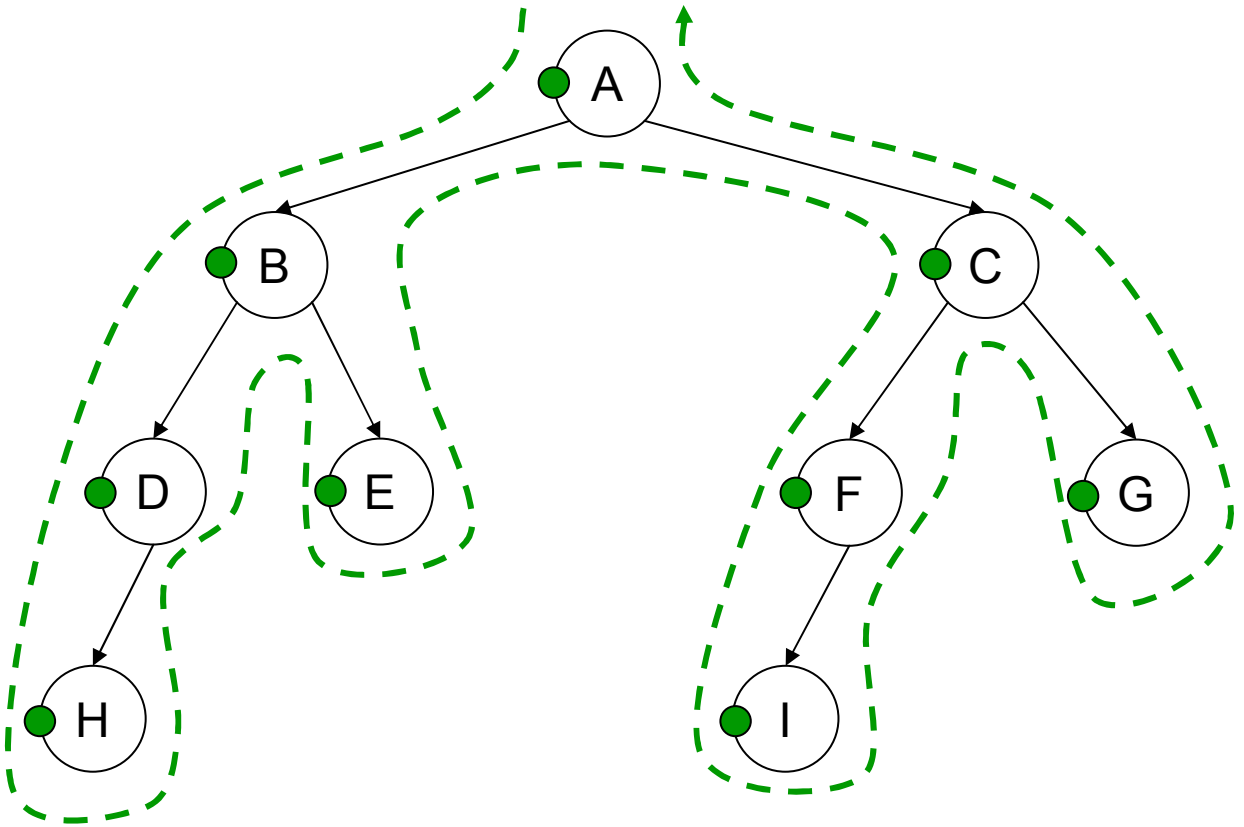
Percurso em AB

- Seja uma AB em que **R** denota sua raiz, **E** e **D** denotam as subárvores esquerda e direita, respectivamente
- Os nós de uma AB podem ser visitados de três formas (**varredura** da árvore):
  - Pré-ordem (*pre-order*): **R**, **E**, **D**
    - visitar a raiz antes das subárvores
  - Em-ordem (*in-order*): **E**, **R**, **D**
  - Pós-ordem (*post-order*): **E**, **D**, **R**
    - visitar a raiz após visitar as subárvores



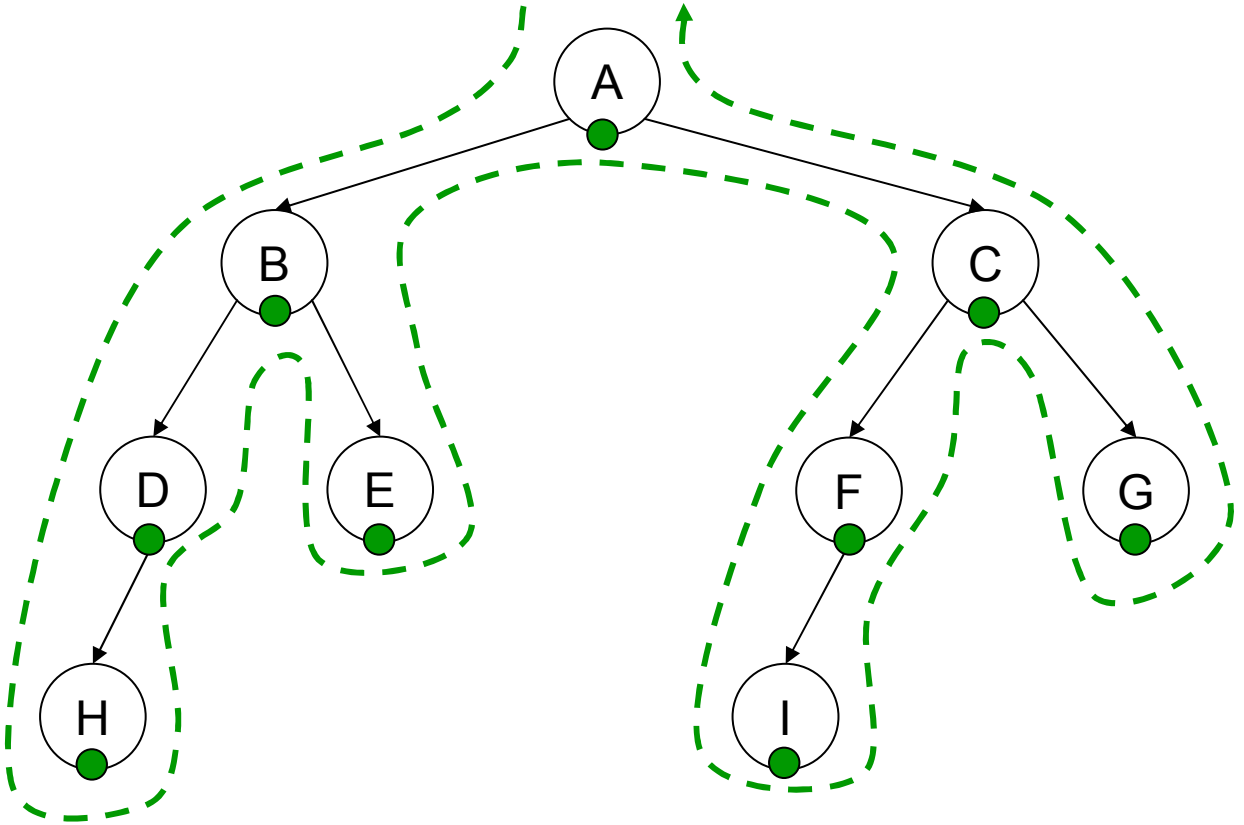
Percurso em AB

- Pré-ordem: A, B, D, H, E, C, F, I, G



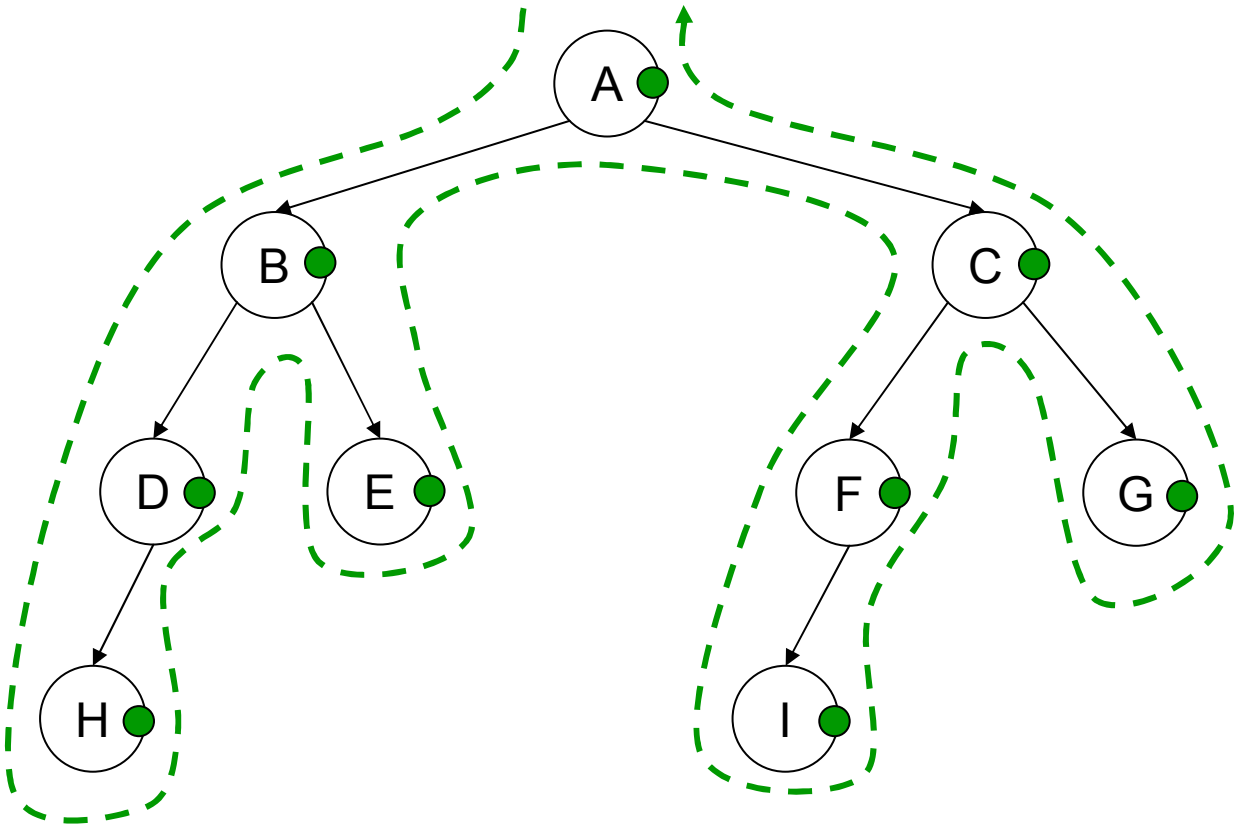
Percurso em AB

- Em-ordem: H, D, B, E, A, I, F, C, G



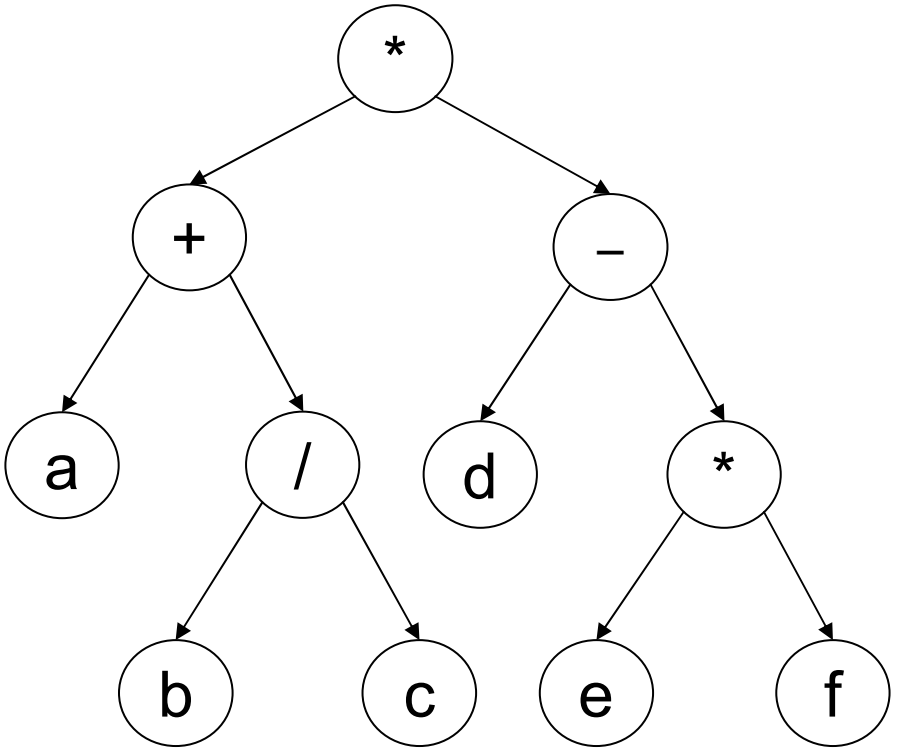
Percurso em AB

- Pós-ordem: H, D, E, B, I, F, G, C, A



Percurso em AB

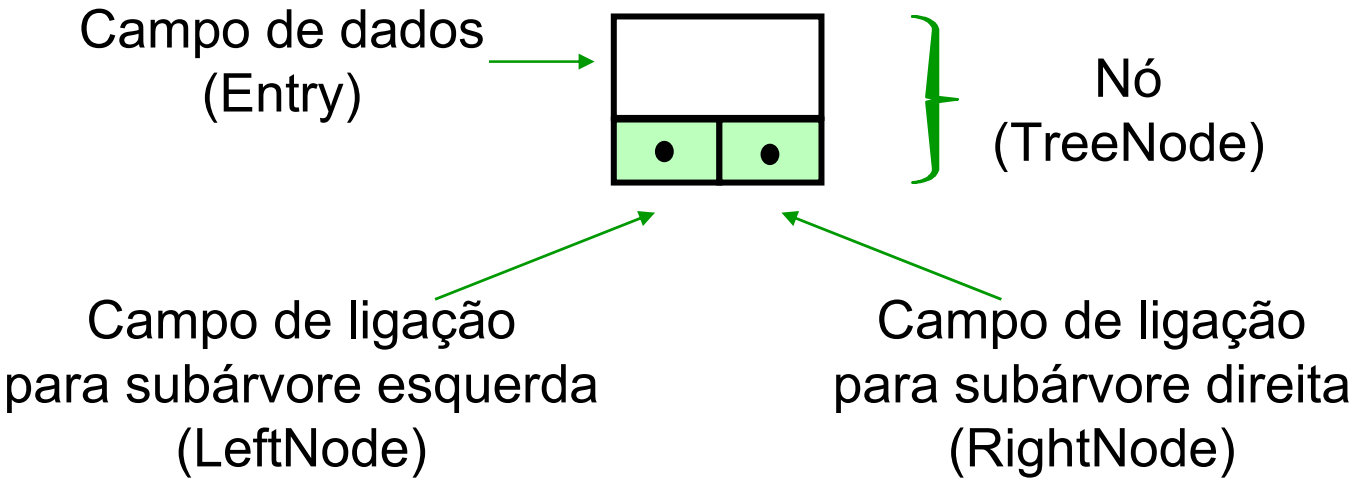
- Pré-ordem
  - * + a / b c – d * e f
- Em-ordem
  - a + b / c * d – e * f
- Pós-Ordem
  - a b c / + d e f * – *



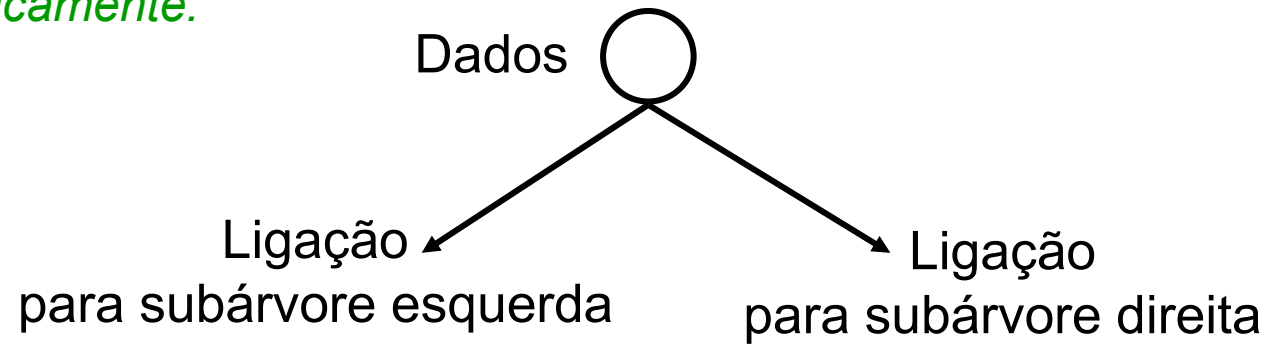
Implementação de Árvores Binárias

- É natural a implementação de árvores por meio de ponteiros
- Como toda árvore possui uma raiz (*root*), uma árvore vazia pode ser representada por um ponteiro aterrado (NULL em C++)
- Cada nó em uma árvore binária possui um campo de dados, um ponteiro para a subárvore esquerda e um ponteiro para a sub-árvore direita

Implementação de Árvores Binárias

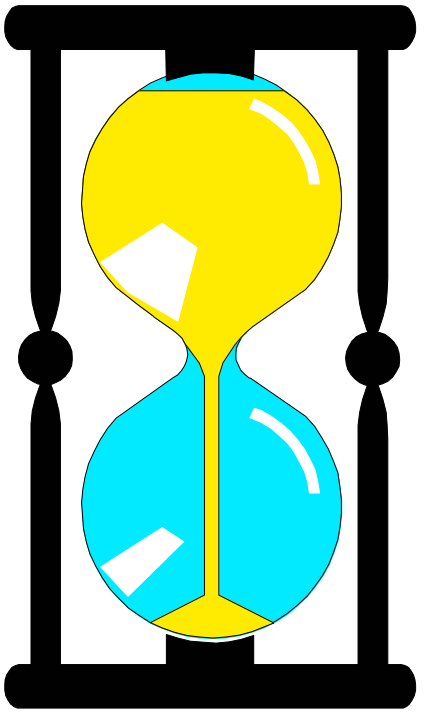


Esquematicamente:



Questão

Utilize estas idéias para escrever uma declaração de tipo que poderia implementar uma árvore binária para armazenar valores inteiros.

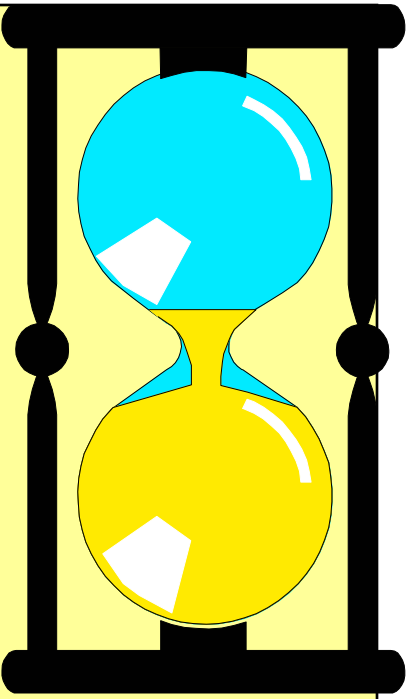


Você tem 5 minutos
para escrever a declaração

Uma Solução

```
class BinaryTree
{ public:
    BinaryTree();
    ~BinaryTree();
    void Insert(int x);
    void Delete(int x);
    bool Search(int x);
    …
  private:
    // declaração de tipos
    struct TreeNode
    { int Entry;            // tipo de dado colocado na árvore
      TreeNode *LeftNode, *RightNode; // subárvores
    };
    typedef TreeNode *TreePointer;

    // declaração de campos
    TreePointer root;
};
```



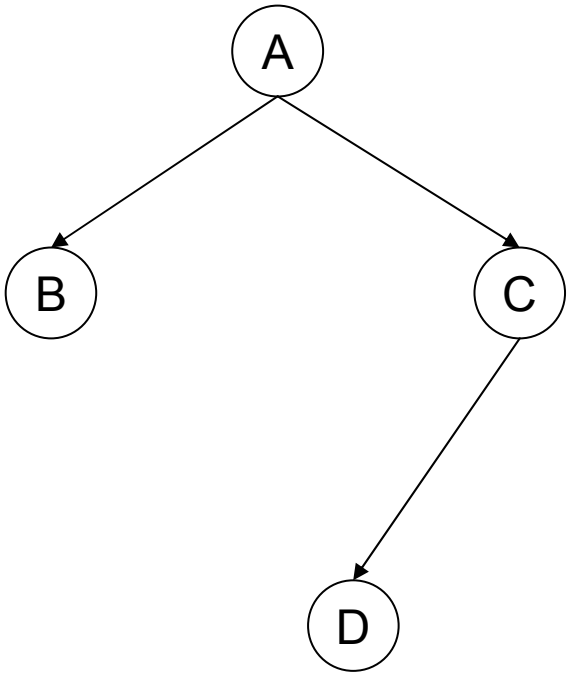
Uma Solução

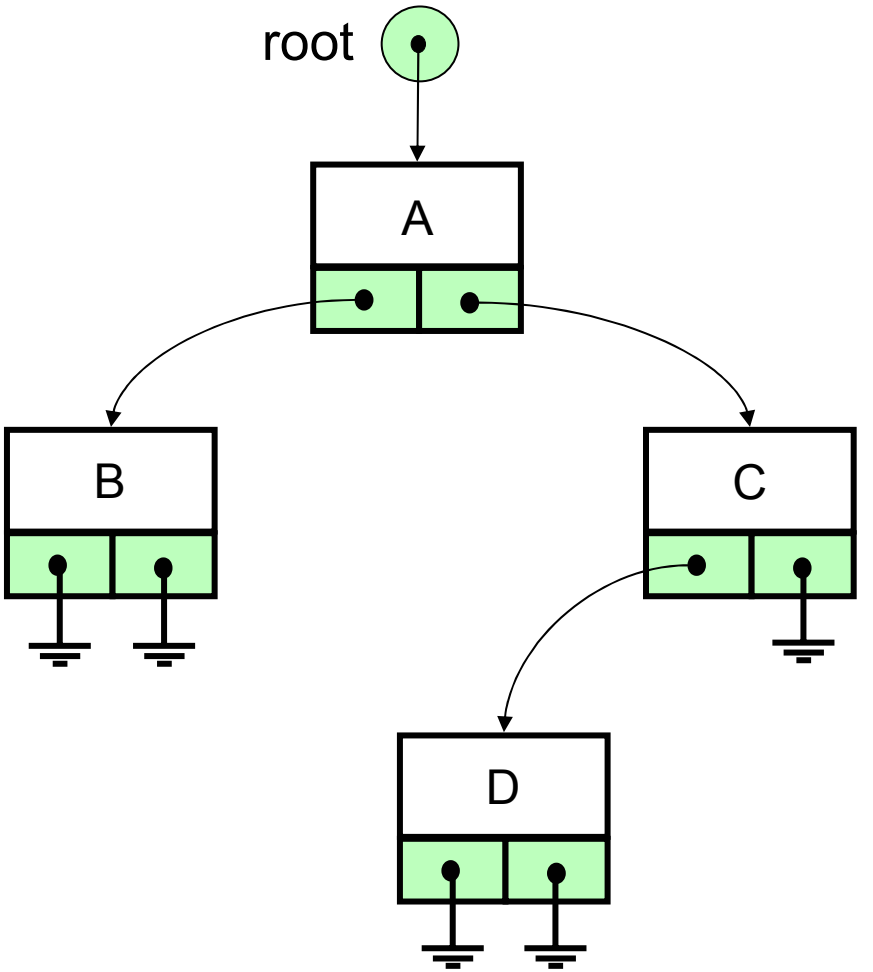
```
class BinaryTree
{ public:
    BinaryTree();
    ~BinaryTree();
    void Insert(int x);
    void Delete(int x);
    bool Search(int x);
    …
  private:
    // declaração de tipos
    struct TreeNode
    { int Entry;            // tipo de dado colocado na árvore
      TreeNode *LeftNode, *RightNode; // subárvores
    };
    typedef TreeNode *TreePointer;

    // declaração de campos
    TreePointer root;
};
```

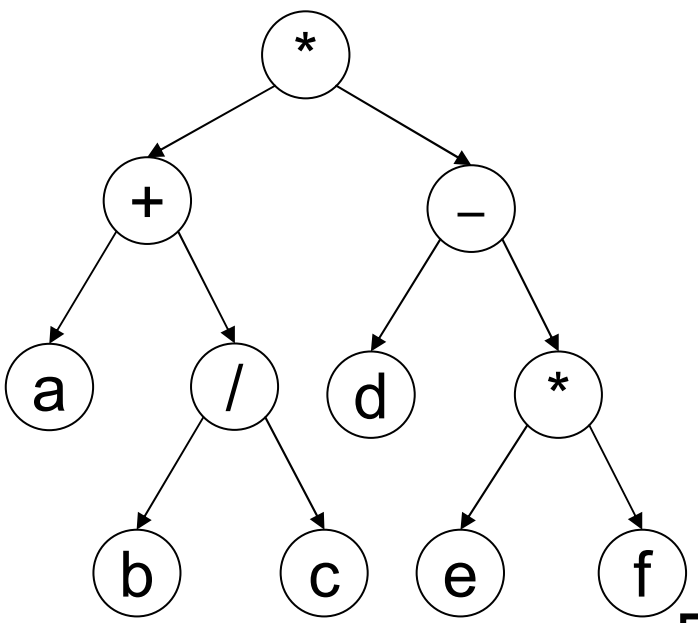
Observe que o tipo **TreeEntry** nesse caso é um inteiro

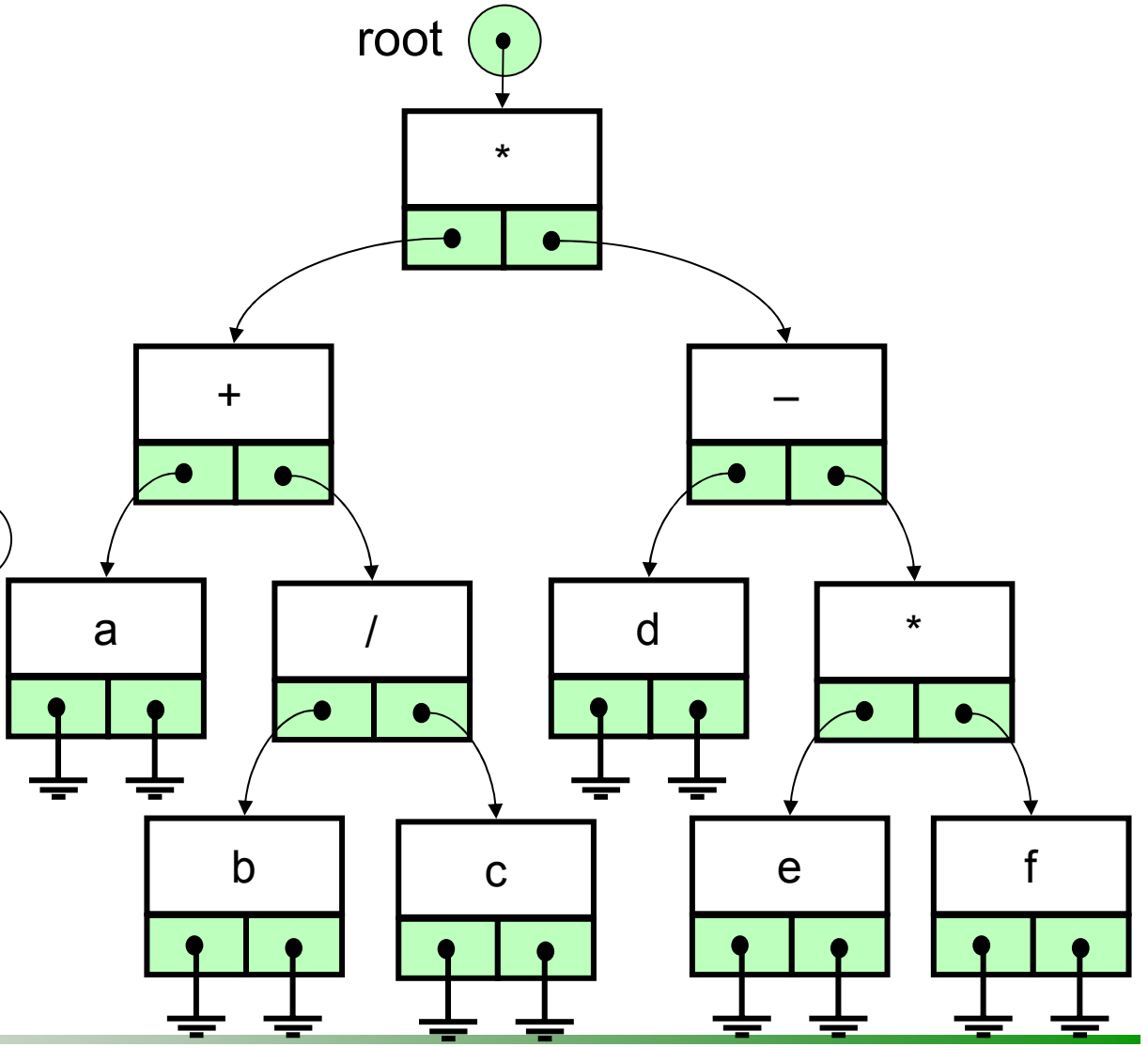
Implementação de Árvores Binárias





Implementação de Árvores Binárias





Operações Básicas

- Com a definição dada já é possível implementar alguns métodos para AB que também se aplicam para ABB (vista a seguir)
- Como os algoritmos em geral são recursivos, serão declarados dois métodos de mesmo nome
  - O método público que faz uma chamada ao método privado de mesmo nome, passando os parâmetros necessários para o método privado recursivo (normalmente a raiz; mas outros parâmetros também podem ser passados)
  - O método privado que efetivamente implementa o algoritmo recursivo

Número de Nós

int BinaryTree::Nodes();

- *pré-condição:* Árvore binária já tenha sido criada
- *pós-condição:* retorna o número de nós existentes na árvore

- Uma idéia para encontrar o número de nós é utilizar recursão:
  - Caso base: uma árvore vazia possui zero nós
  - Caso recursivo: uma árvore que contém um nó possui 1 (o próprio nó) somado ao número de nós na sua subárvore esquerda somado ao número de nós na sua subárvore direita

Número de Nós

```
int BinaryTree::Nodes() // método público
{  return Nodes(root);
}
//-------------------------------------------------------------------
int BinaryTree::Nodes(TreePointer &t) // método privado
{
  if(t == NULL)
     return 0;
  else
    return 1 + Nodes(t->LeftNode) + Nodes(t->RightNode);
}
```

Número de Folhas

int BinaryTree::Leaves();

- *pré-condição:* Árvore binária já tenha sido criada
- *pós-condição:* retorna o número de folhas existentes na árvore

- Novamente, o uso de recursão permite encontrar o número de folhas:
  - Caso base 1: uma árvore vazia possui zero folhas
  - Caso base 2: um nó cujas subárvores esquerda e direita são ambas vazias é uma folha
  - Caso recursivo: o número de folhas de uma árvore que contém um nó (não nulo) é determinado pelo número de folhas da subárvore esquerda deste nó somado ao número de folhas da subárvore direita deste nó

Número de Folhas

```
int BinaryTree::Leaves()
{  return Leaves(root);
}
//-----------------------------------------------------------------
int BinaryTree::Leaves(TreePointer &t)
{  if(t == NULL)
     return 0;
   else
     if(t->LeftNode == NULL && t->RightNode == NULL)
        return 1;
     else
        return Leaves(t->LeftNode) + Leaves(t->RightNode);
}
```

Altura

int BinaryTree::Height();

- *pré-condição:* Árvore binária já tenha sido criada
- *pós-condição:* retorna a altura da árvore

- A definição de altura de uma árvore nos leva ao seguintes casos
  - Caso base: a altura de uma árvore vazia é -1 (por definição a altura das folhas é 0; portanto parece natural adotar -1 como a altura de uma árvore vazia)
  - Caso recursivo: a altura de uma árvore que contém um nó (não nulo) é determinada como sendo a maior altura entre as subárvores esquerda e direita deste nó adicionado a um (uma unidade a mais de altura devido ao próprio nó)

Altura

```
int BinaryTree::Height()
{  return Height(root);
}
//-----------------------------------------------------------------
int BinaryTree::Height(TreePointer &t)
{ if(t == NULL)
     return -1;
  else
  {   int L,R;
      L = Height(t->LeftNode);
      R = Height(t->RightNode);
      if(L>R) return L+1; else return R+1;
  }
}
```

Percurso em Pré-Ordem

- Para percorrer uma AB em pré-ordem, assume-se que existe um procedimento (ou método) denominado
  - void process(TreeEntry **x**)
- que efetua algum tipo de processamento com o valor **x** passado como parâmetro, lembrando que **TreeEntry** é o tipo de dado que é colocado na AB
- Os demais percursos são similares e sua implementação fica como exercício

Percurso em Pré-Ordem

```
void BinaryTree::PreOrder()
{  PreOrder(root);
}
//-----------------------------------------------------------------
void BinaryTree::PreOrder(TreePointer &t)
{
    if(t != NULL)
    {  process(t->Entry);
       PreOrder(t->LeftNode);
       PreOrder(t->RightNode);
     }
}
```

Em situações mais simples, *process* pode ser substituído por um comando de escrita

Percurso em Pré-Ordem

```
void BinaryTree::PreOrder()
{  PreOrder(root);
}
//-------------------------------------------------------------------
void BinaryTree::PreOrder(TreePointer &t)
{
    if(t != NULL)
    {  cout << t->Entry << endl;
       PreOrder(t->LeftNode);
       PreOrder(t->RightNode);
     }
}
```

Em situações mais simples, *process* pode ser substituído por um comando de escrita

Impressão

- A impressão de uma árvore binária pode ser efetuada utilizando algum dos percursos (pré-, in- ou pós-ordem) ou qualquer outra estratégia que for mais adequada
- A implementação seguinte imprime com deslocamentos (espaços) uma AB

Impressão

```
void BinaryTree::Print()
{  BinaryTree::Print(root,0);
}
//-----------------------------------------------------------------
void BinarySearchTree::Print(TreePointer &t, int s)
{ int i;
  if(t != NULL)
  {  Print(t->RightNode, s+3);
     for(i=1; i<=s; i++)
        cout << " ";                    // espaços
     cout << setw(6) << t->Entry << endl;
    Print(t->LeftNode, s+3);
  }
}
```

Considerações Finais

- Nesta apresentação foram vistos vários conceitos sobre árvores e árvores binárias, incluindo alguns algoritmos mais elementares
- Entretanto, imagine o processo de busca de informação em uma árvore (binária ou não)
  - Se as chaves não estão em uma ordem pré-estabelecida, toda a estrutura precisa ser percorrida para encontrar uma determinada chave (no pior caso), o que não seria eficiente
- Veremos na próxima apresentação uma forma de melhorar o tempo de busca, utilizando Árvores Binárias de Busca

Slides baseados em:

Horowitz, E. & Sahni, S.;
Fundamentos de Estruturas de Dados,
Editora Campus, 1984.

Wirth, N.; *Algoritmos e Estruturas de Dados*,
Prentice/Hall do Brasil, 1989.

Material elaborado por
José Augusto Baranauskas
Elaboração inicial 2004; Revisão atual 2007