Representação de Arranjos

- Embora os arranjos multidimensionais sejam fornecidos como um objeto de dados padrão na maioria das linguagens de programação em alto nível, é interessante examinar como são representados na memória

Algoritmos e Estruturas de Dados I

José Augusto Baranauskas
Departamento de Física e Matemática – FFCLRP-USP

augusto@usp.br
http://dfm.ffclrp.usp.br/~augusto

Introdução

- Lembre-se que a memória é unidimensional e pode ser considerada como palavras numeradas de 1 até *m* (ou, alternativamente, de 0 a *m*-1)
- Assim, o objetivo é a representação de arranjos *n* dimensionais em uma memória unidimensional
  - *n*=1: vetor (arranjo unidimensional)
  - *n*=2: matriz (arranjo bidimensional)
  - *n*>2: arranjo (ou matriz) multidimensional

Introdução

- Dentre as várias representações vamos utilizar uma na qual a localização na memória de um elemento do arranjo arbitrário possa ser definida de modo eficiente, por exemplo $A[i_1, i_2, ..., i_n]$
- Isso é necessário, pois, em geral, os programas que utilizam arranjos podem fazer uso dos elementos dele em qualquer ordem, inclusive em ordem aleatória
- Além disso, para poder recuperar facilmente os elementos de um arranjo será também necessário ter condições para determinar a quantidade de espaço da memória a ser reservada para um arranjo em particular
- Assumindo que cada elemento de um arranjo necessita de apenas uma palavra da memória, a quantidade de palavras necessária corresponderá à quantidade de elementos dentro do arranjo

Número de Elementos

- Seja um arranjo *n*-dimensional declarado como **A[l_1:u_1, l_2:u_2, ..., l_n:u_n]** (ou, equivalentemente **A[l_1..u_1, l_2..u_2, ..., l_n..u_n]**), onde **l_i:u_i** (**l_i..u_i**) representam os limites inferior e superior de variação dos índices, respectivamente ($1 \leq i \leq n$)
- A quantidade dos elementos do arranjo **A** é:

$$\prod_{i=1}^{n} (u_i - l_i + 1)$$

- Por exemplo, dado o arranjo declarado como
  - A[4:5, 2:4, 1:2, 3:4]
  - temos um total de (5-4+1)*(4-2+1)*(2-1+1)*(4-3+1) = 2*3*2*2 = 24 elementos

Ordem de Armazenamento

- Os arranjos podem ser armazenados por **ordem de linhas** ou por **ordem de colunas**
  - No armazenamento por linhas, todos os elementos da primeira linha são armazenados; a seguir todos os elementos da segunda linha e assim sucessivamente
  - No armazenamento por colunas, todos os elementos da primeira coluna são armazenados; a seguir todos os elementos da segunda coluna e assim por diante

Exemplo

- No caso do arranjo bidimensional B[1:2, 1:4]

	1	2	3	4
1	10	20	30	40
2	50	60	70	80

- O armazenamento por linhas resultaria na seguinte disposição na memória:

B[1,1]	B[1,2]	B[1,3]	B[1,4]	B[2,1]	B[2,2]	B[2,3]	B[2,4]
10	20	30	40	50	60	70	80

- Esse mesmo arranjo se armazenado por colunas ficaria:

B[1,1]	B[2,1]	B[1,2]	B[2,2]	B[1,3]	B[2,3]	B[1,4]	B[2,4]
10	50	20	60	30	70	40	80

Armazenamento por Linhas

- O arranjo A[4:5, 2:4, 1:2, 3:4] armazenado por linhas tem seus elementos na seguinte ordem
  - A[4,2,1,3], A[4,2,1,4], A[4,2,2,3], A[4,2,2,4] seguidos de
  - A[4,3,1,3], A[4,3,1,4], A[4,3,2,3], A[4,3,2,4] seguidos de
  - A[4,4,1,3], A[4,4,1,4], A[4,4,2,3], A[4,4,2,4] seguidos de
  - A[5,2,1,3], A[5,2,1,4], A[5,2,2,3], A[5,2,2,4] seguidos de
  - A[5,3,1,3], A[5,3,1,4], A[5,3,2,3], A[5,3,2,4] seguidos de
  - A[5,4,1,3], A[5,4,1,4], A[5,4,2,3], A[5,4,2,4]
- Nota-se que o índice da direita move-se mais rápido
- De fato, se considerarmos os subscritos como números, observamos que eles aumentam: 4213, 4214, ..., 5423, 5424
- Assim, a ordem de armazenamento por linhas é também denominada **ordem lexicográfica**

Armazenamento por Linhas

- Do ponto de vista do compilador, o problema é como traduzir do nome $A[i_1, i_2, ..., i_n]$ para a localização correta na memória
- Supondo que A[4,2,1,3] está armazenado na posição 100, então A[4,2,1,4] está na posição 101 e A[5,4,2,4] na posição 123
- De maneira geral podemos deduzir uma fórmula para o endereço de qualquer elemento usando apenas o endereço inicial do arranjo, mais as dimensões declaradas
- Sem perda de generalidade, vamos assumir que os limites inferiores são 1 em cada dimensão l_i
- Antes de encontrar a fórmula para o caso de um arranjo *n*-dimensional, veremos a representação de arranjos armazenados por linhas para 1, 2 e 3 dimensões

Arranjo Unidimensional

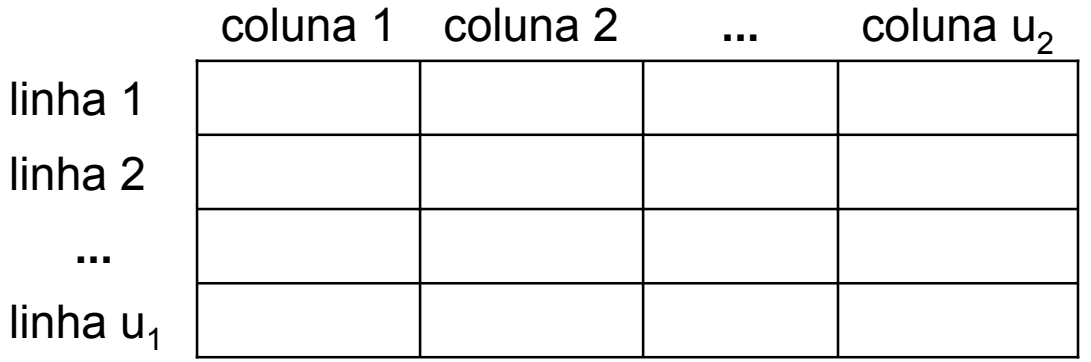
- Se A está declarado como A[1:u_1] (totalizando u_1 elementos) e assumindo uma palavra de memória por elemento, o arranjo pode ser representado na memória seqüencial da forma:

A[1]	A[2]	A[3]	...	A[i]	...	A[u_1]
α	α+1	α+2	...	α+i-1	...	α+u_1-1

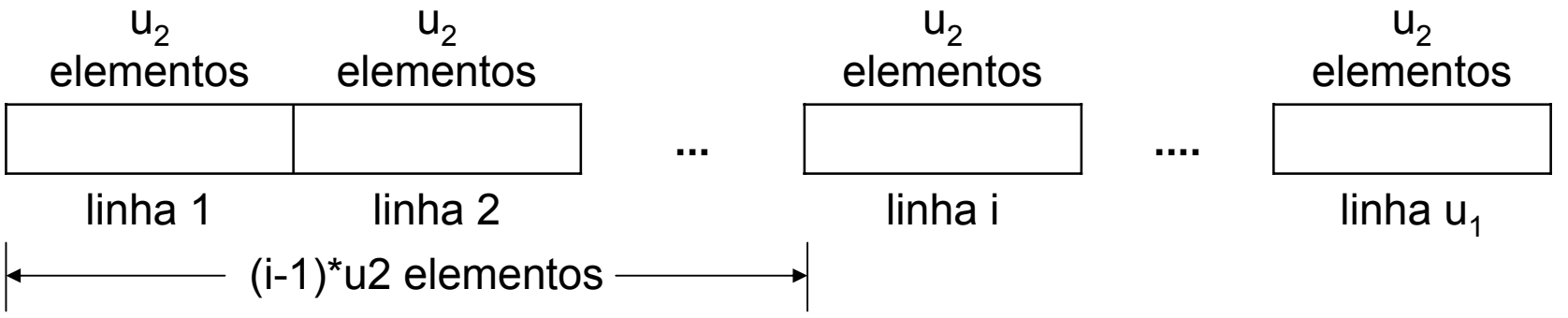
- Se α é o endereço de A[1] então o endereço de um elemento arbitrário A[i] é α+(i-1)

Arranjo Bidimensional

- O arranjo A[1:u_1,1:u_2] pode ser interpretado como u_1 linhas: linha 1, linha 2, ..., linha u_1 sendo cada linha composta de u_2 elementos
- Essas linhas são representadas na memória como:

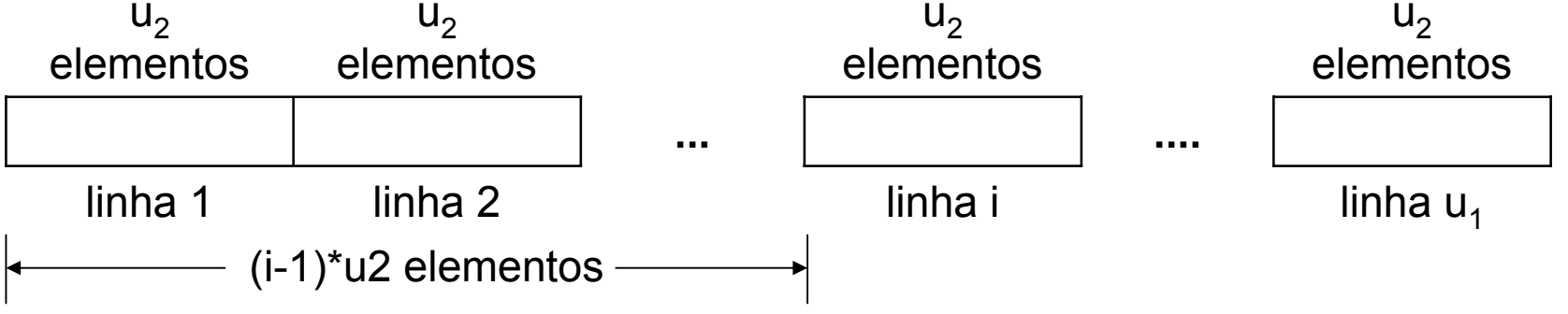


- ou seja:



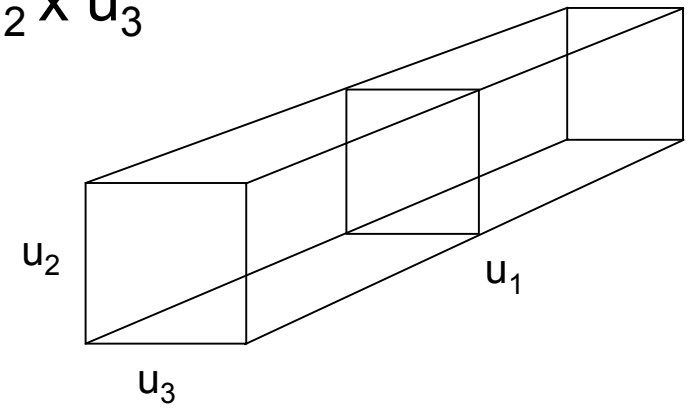
Arranjo Bidimensional

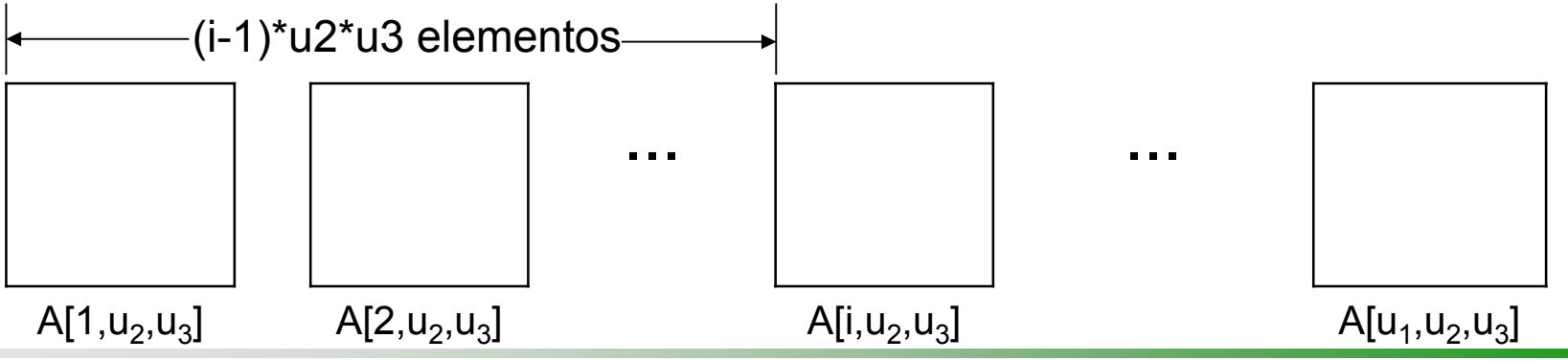
- Se α é o endereço de A[1,1] então o endereço de A[1,j] é α+(j-1)
- Como existem (i-1) linhas, todas de tamanho u_2, precedendo o primeiro elemento da i-ésima linha o endereço de A[i,j] é $\alpha+(i-1)*u_2+(j-1)$



Arranjo Tridimensional

- Arranjos tridimensionais A[1:u_1,1:u_2,1:u_3] podem ser interpretados como u_1 arranjos bidimensionais com dimensões u_2 x u_3





Arranjo Tridimensional

- Para localizar A[i,j,k] obtemos primeiro $\alpha+(i-1)*u_2*u_3$ como o endereço para A[i,1,1], desde que haja (i-1) arranjos bidimensionais de tamanho u_2 x u_3 precedendo este elemento
- Partindo disso e da fórmula para endereçamento de um arranjo bidimensional, temos que como endereço de A[i,j,k] é $\alpha+(i-1)*u_2*u_3+(j-1)*u_3+(k-1)$

Arranjos Multidimensionais

- A fórmula de endereçamento para qualquer elemento $A[i_1,i_2,...,i_n]$ em um arranjo *n*-dimensional, declarado como $A[1:u_1, 1:u_2, ..., 1:u_n]$ pode ser conseguida facilmente
- Se α é o endereço para $A[1,1,...,1]$ então $\alpha+(i_1-1)*u_2*u_3*...*u_n$ é o endereço para $A[i_1,1,...,1]$
- O endereço para $A[i_1,i_2,1,...,1]$ será então $\alpha + (i_1-1)*u_2*u_3*...*u_n + (i_2-1)*u_3*u_4*...*u_n$

Arranjos Multidimensionais

- Repetindo dessa maneira, o endereço para $A[i_1,i_2,...,i_n]$ é
  - $\alpha + (i_1-1)*u_2*u_3*...*u_n$
  - $+ (i_2-1)*u_3*u_4*...*u_n$
  - $+ (i_3-1)*u_4*u_5*...*u_n$
  - ...
  - $+ (i_{n-1}-1)*u_n$
  - $+ (i_n-1)$

- Ou seja:

$$\alpha + \sum_{j=1}^{n} (i_j - 1) \times p_j$$

- onde:

$$\begin{cases} p_j = \prod_{k=j+1}^{n} u_k & 1 \leq j < n \\ p_n = 1 \end{cases}$$

Eficiência

- Note que p_j pode ser computado de p_{j+1}, $1 \leq j < n$, usando apenas uma multiplicação $p_j = u_{j+1} * p_{j+1}$
- Assim, um compilador pegará inicialmente os limites declarados u_1, u_2, ..., u_n usando-os para computar as constantes p_1, p_2, ..., p_{n-1} recorrendo a *n*-2 multiplicações
- O endereço de $A[i_1,i_2,...,i_n]$ pode então ser achado usando a fórmula, que precisa de mais *n*-1 multiplicações e *n* adições e *n* subtrações

Matrizes Esparsas

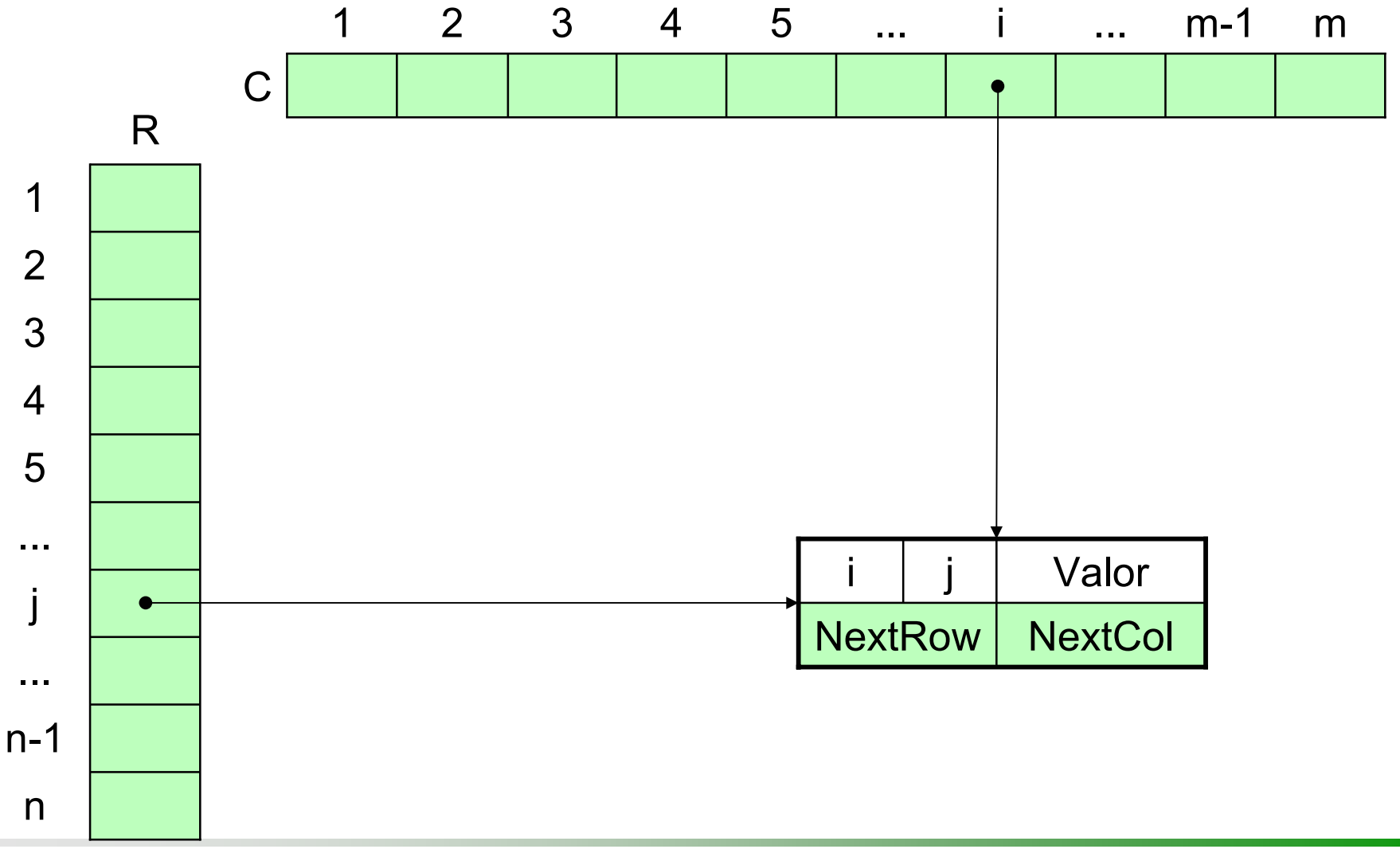
- Embora não exista uma definição precisa, uma matriz é **esparsa** quando ela tem muitas entradas iguais a zero (elementos nulos)
- Por exemplo, a matriz de ordem 5 ao lado possui um total de 25 elementos sendo que somente 7 (28%) são diferentes de zero

$$\begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 22 & 0 \\ 0 & 11 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 91 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 28 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrizes Esparsas

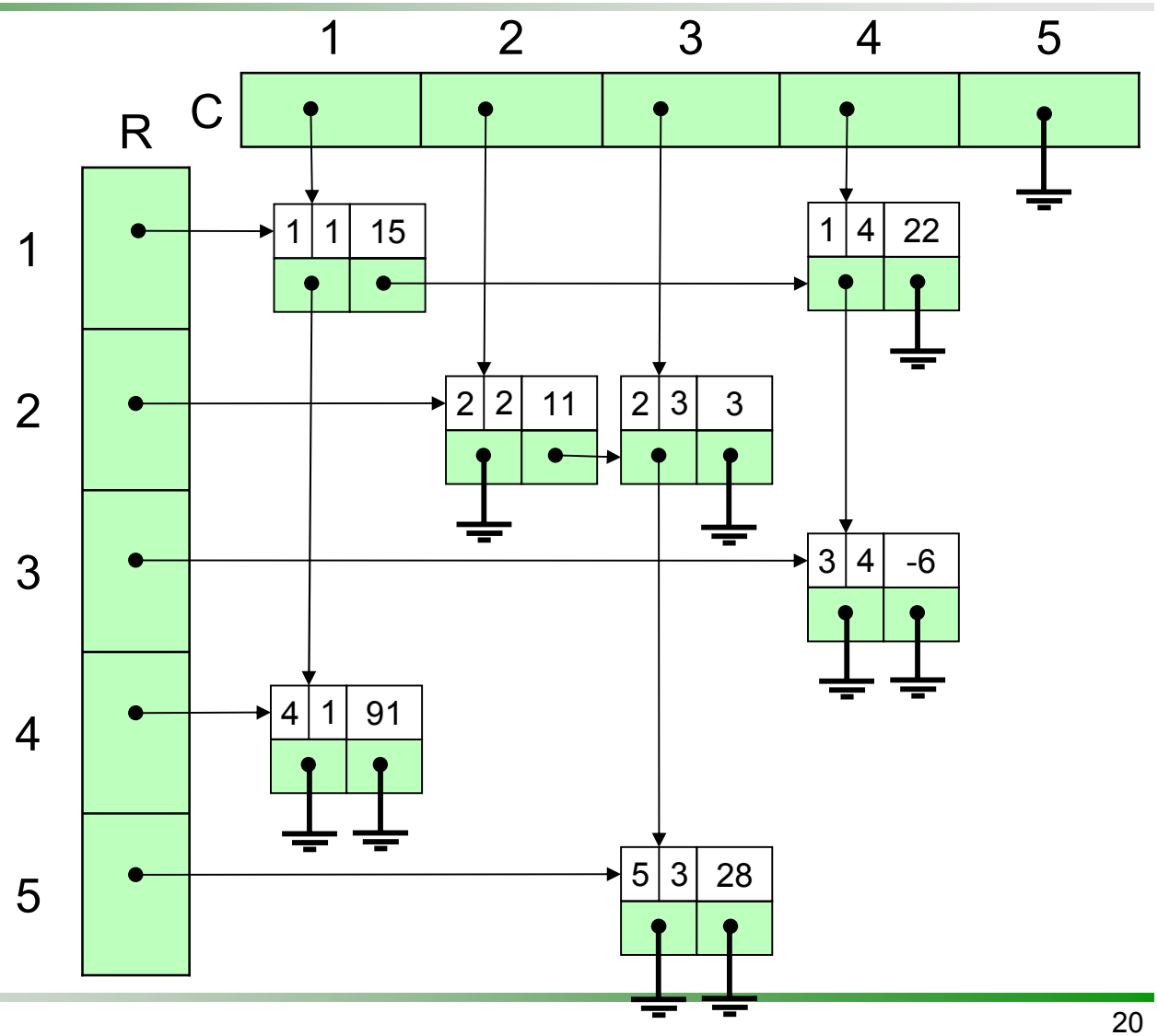
- Assim, o problema consiste em representar matrizes esparsas de forma a economizar memória, definindo o ADT Matriz Esparsa
- Seja A uma matriz com *n* linhas e *m* colunas, ou seja, A[1:*n*, 1:*m*] contendo *k* valores distintos de zero
- Uma forma de representação conhecida como **Listas Cruzadas** utiliza:
  - Um vetor de colunas C[1:*m*]
  - Um vetor de linhas R[1:*n*]
  - O elemento A[i,j] é representado por uma estrutura contendo:
    - i, j, Valor de A[i,j]
    - NextCol: ponteiro para a coluna do próximo elemento não nulo na linha i
    - NextRow: ponteiro para a linha do próximo elemento não nulo na coluna j
  - Ambos vetores C e R são do tipo ponteiro para a estrutura descrita acima

Listas Cruzadas



Listas Cruzadas

$$\begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 22 & 0 \\ 0 & 11 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 91 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 28 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Listas Cruzadas

- Uma matriz esparsa armazenada como uma matriz bidimensional ocupa *n***m* palavras de memória
- Usando listas cruzadas, assumindo que a matriz esparsa armazena somente inteiros e que o espaço ocupado por ponteiros seja igual ao espaço ocupado por um inteiro (uma palavra), temos:
  - 5**k* (linha, coluna, valor, NextRow, NextCol)
  - *n* palavras para vetor R
  - *m* palavras para vetor C
  - Espaço total: 5**k* + *n* + *m*

Listas Cruzadas

- Assim, em termos de espaço, há vantagem em armazenar uma matriz esparsa usando listas cruzadas se:
  - $5*k + n + m < n*m$
- Ou seja, quando
  - $k < ((n - 1) * (m - 1) - 1)) / 5$
- Como (n–1)*(m–1) é aproximadamente o tamanho da matriz original, em geral, há ganho em termos de espaço usando listas cruzadas quando um número inferior a 1/5 dos elementos da matriz forem não nulos
- Todavia, as operações sobre listas cruzadas podem ser mais lentas e complexas do que no caso bidimensional

Resumo

- Nesta apresentação foi fornecida a idéia básica de como os arranjos multidimensionais são representados na memória do computador que é unidimensional (linear)
- Adicionalmente, foi visto o conceito de matriz esparsa bem com uma forma de representação utilizando listas encadeadas