Álgebra de Boole e Simplificação de Circuitos Lógicos

- Nesta apresentação serão vistos os postulados e propriedades e formas canônicas de expressões booleanas
- Além disso, serão vistas duas forma de simplificar circuitos
  - Fatoração
  - Diagramas de Veitch-Karnaugh

José Augusto Baranauskas
Departamento de Computação e Matemática – FFCLRP-USP

augusto@usp.br
http://dcm.fmrp.usp.br/~augusto

Motivação

- Como visto, os circuitos lógicos correspondem (executam) expressões booleanas, as quais representam problemas no mundo real
- Porém, os circuitos gerados por tabelas verdade muitas vezes admitem simplificações, o que reduz o número de portas lógicas; essa redução diminui o grau de dificuldade na montagem e custo do sistema digital

Motivação

- O estudo da simplificação de circuitos lógicos requer o conhecimento da álgebra de Boole, por meio de seus postulados, propriedades, equivalências, etc
- De fato, na álgebra de Boole encontram-se os fundamentos da eletrônica digital de circutos

Constantes, Variáveis e Expressões

- Existem apenas duas **constantes booleanas**
  - 0 (zero)
  - 1 (um)
- Uma **variável booleana** é representada por letra e pode assumir apenas dois valores (0 ou 1)
  - Exemplos: A, B, C
- Uma **expressão booleana** é uma expressão matemática envolvendo constantes e/ou variáveis booleanas e seu resultado assume apenas dois valores (0 ou 1)
  - Exemplos:
    - $S = A.B$
    - $S = A+B.C$

Postulados & Propriedades

- Na álgebra booleana há postulados (axiomas) a partir dos quais são estabelecidas várias propriedades
- Existem várias propriedades da negação (complemento, inversor), adição (porta E) e soma (porta OU)
- Estas propriedades podem ser verificadas como equivalências lógicas
- Para demonstrar cada uma, basta utilizar as tabelas-verdade, constatando a equivalência

Postulados

- Complemento
  - Se A=0 então $\bar{A}$=1
  - Se A=1 então $\bar{A}$=0
- Notações alternativas
  - $\bar{A} = A'$
  - $\bar{A} = \neg A$
  - $\overline{B.C} = (B.C)'$
- Adição
  - $0 + 0 = 0$
  - $0 + 1 = 1$
  - $1 + 0 = 1$
  - $1 + 1 = 1$
- Multiplicação
  - $0 . 0 = 0$
  - $0 . 1 = 0$
  - $1 . 0 = 0$
  - $1 . 1 = 1$

Propriedades

Propriedade	Complemento	Adição	Multiplicação
Identidade	$\overline{\overline{A}} = A$	$A + 0 = A$ $A + 1 = 1$ $A + A = A$ $A + \bar{A} = 1$	$A . 0 = 0$ $A . 1 = A$ $A . A = A$ $A . \bar{A} = 0$
Comutativa		$A + B = B + A$	$A . B = B . A$
Associativa		$A+(B+C) = (A+B)+C$ $= A+B+C$	$A.(B.C) = (A.B).C =$ $A.B.C$
Distributiva		$A+(B.C)$ $=$ $(A+B) . (A+C)$	$A.(B+C)$ $=$ $A.B + A.C$

Propriedades

- Absorção
  - $A + (A.B) = A$
  - $A \,.\, (A+B) = A$
- Outras Identidades
  - $A + \bar{A}.B = A + B$
  - $(A+B).(A+C) = A + B.C$
- De Morgan
  - $(A.B)' = \bar{A} + \bar{B}$
  - $(A+B)' = \bar{A} \,.\, \bar{B}$
- De Morgan se estende para *n* variáveis
  - $(A.B. \ldots .\, n)' = \bar{A} + \bar{B} + \ldots + \bar{n}$
  - $(A+B+ \ldots +n)' = \bar{A} \,.\, \bar{B} \,.\, \ldots \,.\, \bar{n}$

Exercício

- Mostre, usando simplificação por postulados e propriedades, ou seja, por transformações algébricas que:
  - A+A.B = A
  - A.(A+B) = A

Solução

- A+A.B = A
  - A + A.B
  - = A.(1+B) — distributiva
  - = A.(1) — identidade da adição
  - = A — identidade da multiplicação
- A.(A+B) = A
  - A.(A+B)
  - = (A.A) + (A.B) — distributiva
  - = A + (A.B) — identidade da multiplicação
  - = A — pela prova do exercício acima

Exercício

- Idem ao exercício anterior
  - $A + \bar{A}.B = A + B$
  - $(A+B).(A+C) = A + B.C$

Solução

- $A + \bar{A}.B = A + B$
  - $A + \bar{A}.B = (A + \bar{A}.B)''$ identidade do complemento
  - $= (\bar{A} . (\bar{A}.B)')' = (\bar{A} . (A + \bar{B}))'$ De Morgan
  - $= (\bar{A}.A + \bar{A}.\bar{B})'$ distributiva
  - $= (0 + \bar{A}.\bar{B})'$ identidade da multiplicação
  - $= (\bar{A}.\bar{B})'$ identidade da adição
  - $= A + B$ De Morgan
- $A + \bar{A}.B = A + B$
  - $A + \bar{A}.B = (A + \bar{A}).(A+ B)$ distributiva $\alpha+\beta.\gamma= (\alpha+\beta) .(\alpha+\gamma)$
  - $= 1.(A+B)$ identidade da adição
  - $= A + B$ identidade da multiplicação

Solução

- (A+B).(A+C) = A + B.C
  - (A+B).(A+C)
  - = A.A + A.C + B.A + B.C distributiva
  - = A.A + A.C + A.B + B.C comutativa
  - = A + A.C + A.B + B.C identidade da multiplicação
  - = A + A.(C+B) + B.C distributiva
  - = A.(1 + (C+B)) + B.C distributiva
  - = A.(1) + B.C identidade da adição
  - = A + B.C identidade da multiplicação

Simplificação de Expressões Booleanas

- Usando a álgebra booleana é possível simplificar expressões
- Como cada circuito corresponde a uma expressão, simplificações de expressões significam em simplificações de circuitos
- Há duas formas para simplificar expressões
  - Fatoração
  - Mapas de Veitch-Karnaugh
- Veremos, a seguir, o processo de fatoração

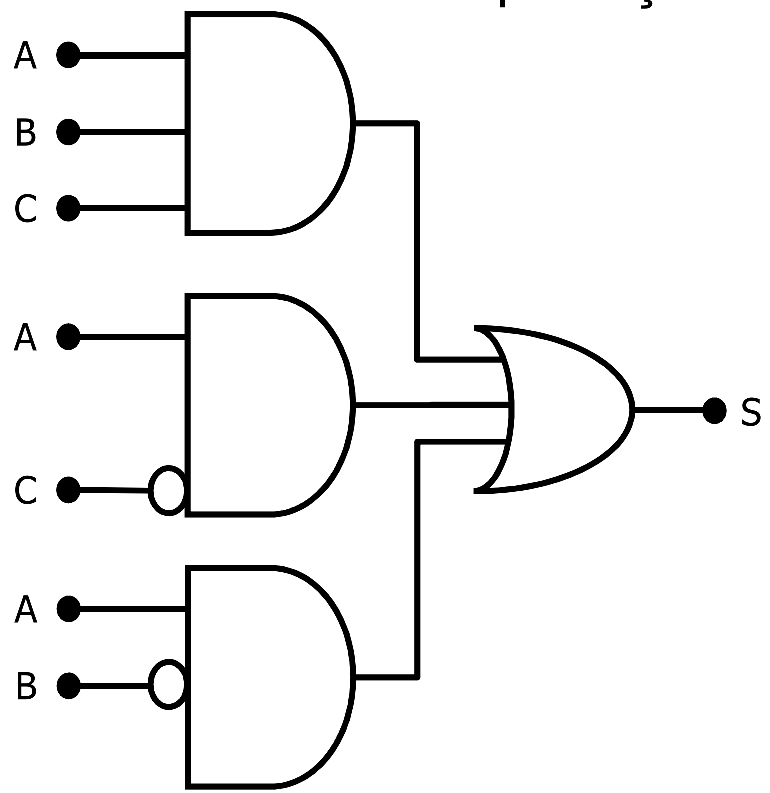
Fatoração

- Consiste na aplicação dos postulados e propriedades da álgebra booleana, com o objetivo de simplificar a expressão
- Por exemplo
  - $S = A.B.C + A.C' + A.B'$
  - $= A.(B.C + C' + B')$ distributiva
  - $= A.(B.C + (C' + B'))$ associativa
  - $= A.(B.C + ((C' + B')')')$ identidade do complemento
  - $= A.(B.C + (C.B)')$ De Morgan
  - $= A.(B.C + (B.C)')$ comutativa
  - $= A.(1)$ identidade da adição ($D+\bar{D}=1$)
  - $= A$ identidade da multiplicação

Fatoração

- Portanto,
  - A.B.C + A.C’ + A.B’ = A
- Essa expressão mostra a importância da simplificação de expressões e a consequente minimização do circuito, sendo o resultado final igual ao da variável A

- Circuito antes da simplificação



- Circuito após simplificação

Exercício

- Simplifique as expressões
  - $S = A'.B'.C' + A'.B.C' + A.B'.C$
  - $S = \bar{A}.\bar{B} + \bar{A}.B$

Solução

- Simplifique as expressões
  - $S = A'.B'.C' + A'.B.C' + A.B'.C$
    - $= A'.C'.B' + A'.C'.B + A.B'.C$
    - $= A'.C'.(B' + B) + A.B'.C$
    - $= A'.C'.(1) + A.B'.C$
    - $= A'.C' + A.B'.C$
  - $S = \bar{A}.\bar{B} + \bar{A}.B$
    - $= \bar{A}.(\bar{B}+B)$
    - $= \bar{A}.(1)$
    - $= \bar{A}$

Exercício

- Simplifique as expressões
  - $S = A'.B'.C' + A'.B.C + A'.B.C' + A.B'.C' + A.B.C'$
  - $S = (A+B+C).(\bar{A}+\bar{B}+C)$

Solução

- $S = A'.B'.C' + A'.B.C + A'.B.C' + A.B'.C' + A.B.C'$
  - $= A'.B'.C' + A'.B.C + A'.B.C' + A.B'.C' + A.B.C'$
  - $= A'.B.C + (A'.B' + A'.B + A.B' + A.B).C'$
  - $= A'.B.C + (A'.B' + A'.B + A.B' + A.B).C'$
  - $= A'.B.C + (A'.(B' + B) + A.(B' + B)).C'$
  - $= A'.B.C + (A'.(1) + A.(1)).C'$
  - $= A'.B.C + (A' + A).C'$
  - $= A'.B.C + (1).C'$
  - $= A'.B.C + C'$ identidade $X+(X'.Y) = X+Y$
  - $= A'.B + C'$
- $S = (A+B+C).(\bar{A}+\bar{B}+C)$
  - $= A.\bar{A} + A.\bar{B} + A.C + B.\bar{A} + B.\bar{B} + B.C + C.\bar{A} + C.\bar{B} + C.C$
  - $= 0 + A.\bar{B} + A.C + B.\bar{A} + 0 + B.C + C.\bar{A} + C.\bar{B} + C$
  - $= A.\bar{B} + B.\bar{A} + A.C + B.C + C.\bar{A} + C.\bar{B} + C$
  - $= A.\bar{B} + B.\bar{A} + C.(A + B + \bar{A} + \bar{B} + 1)$
  - $= A.\bar{B} + B.\bar{A} + C.(1)$
  - $= A.\bar{B} + B.\bar{A} + C$

Formas Normais (Canônicas)

- Toda expressão booleana pode ser escrita em uma forma padronizada, denominada **forma normal** ou **forma canônica**
- Duas formas normais são
  - Forma Normal Conjuntiva (FNC), Produto de Somas ou Produto de Maxtermos
  - Forma Normal Disjuntiva (FND), Soma de Produtos ou Soma de Mintermos

Maxtermos e Mintermos

- Maxtermos (ou maxitermos)
  - Variável com valor 0 é deixada intacta
  - Variável com valor 1 é alterada pela sua negação
  - Variáveis de uma mesma linha são conectadas por **+** (adição)
- Mintermos (ou minitermos)
  - Variável com valor 1 é deixada intacta
  - Variável com valor 0 é alterada pela sua negação
  - Variáveis de uma mesma linha são conectadas por **.** (multiplicação)

A	B	C	Maxtermo	Mintermo
0	0	0	$A+B+C$	$\bar{A}.\bar{B}.\bar{C}$
0	0	1	$A+B+\bar{C}$	$\bar{A}.\bar{B}.C$
0	1	0	$A+\bar{B}+C$	$\bar{A}.B.\bar{C}$
0	1	1	$A+\bar{B}+\bar{C}$	$\bar{A}.B.C$
1	0	0	$\bar{A}+B+C$	$A.\bar{B}.\bar{C}$
1	0	1	$\bar{A}+B+\bar{C}$	$A.\bar{B}.C$
1	1	0	$\bar{A}+\bar{B}+C$	$A.B.\bar{C}$
1	1	1	$\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$	$A.B.C$

Forma Normal Disjuntiva

- **Mintermo** (ou **minitermo**) é o **termo produto** associado à cada linha da tabela verdade, no qual todas as variáveis de entrada estão presentes
- Dado um dado mintermo, se substituirmos os valores das variáveis associadas, obteremos 1
- Porém, se substituirmos nesse mesmo mintermo quaisquer outras combinações de valores, obteremos 0
- Dessa forma, se quisermos encontrar a equação para uma função a partir de sua tabela verdade, basta montarmos um **OU** entre os mintermos associados aos **1s** da função

FND: Exemplo

- S é uma função das variáveis de entrada A, B e C
- Os valores de (A,B,C) para os quais S=1 encontram-se nas situações 2, 3, 5 e 6
- Os mintermos associados a essas condições (ou seja, os mintermos 1) são mostrados na tabela ao lado
- Logo, a expressão em soma de produtos (FND) para S será o **OU** entre estes produtos
- $S = \bar{A}.B.\bar{C} + \bar{A}.B.C + A.\bar{B}.C + A.B.\bar{C}$

Situação	A	B	C	S	Mintermo
0	0	0	0	0	
1	0	0	1	0	
2	0	1	0	**1**	$\bar{A}.B.\bar{C}$
3	0	1	1	**1**	$\bar{A}.B.C$
4	1	0	0	0	
5	1	0	1	**1**	$A.\bar{B}.C$
6	1	1	0	**1**	$A.B.\bar{C}$
7	1	1	1	0	

Forma Normal Conjuntiva

- **Maxtermo** (ou **maxitermo**) é o **termo soma** associado à cada linha da tabela verdade, no qual todas as variáveis de entrada estão presentes
- Dado um dado maxtermo, se substituirmos os valores das variáveis associadas, obteremos 0
- Porém, se substituirmos nesse mesmo maxtermo quaisquer outras combinações de valores, obteremos 1
- Dessa forma, se quisermos encontrar a equação para uma função a partir de sua tabela verdade, basta montarmos um **E** entre os maxtermos associados aos **0s** da função

FNC: Exemplo

- S é uma função das variáveis de entrada A, B e C
- Os valores de (A,B,C) para os quais S=0 encontram-se nas situações 0, 1, 4 e 7
- Os maxtermos associados a essas condições (ou seja, os maxtermos 0) são mostrados na tabela ao lado
- Logo, a expressão em produto de somas (FNC) para S será o **E** entre estas somas
- $S = (A+B+C) . (A+B+\bar{C}). (\bar{A}+B+C) . (\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})$

Situação	A	B	C	S	Maxtermo
0	0	0	0	**0**	$A+B+C$
1	0	0	1	**0**	$A+B+\bar{C}$
2	0	1	0	1	
3	0	1	1	1	
4	1	0	0	**0**	$\bar{A}+B+C$
5	1	0	1	1	
6	1	1	0	1	
7	1	1	1	**0**	$\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$

Simplificação a partir da Forma Normal

- Uma vez obtida a forma normal de uma função booleana, é possível simplificá-la por meio de manipulação algébrica, respeitando os postulados e propriedades da álgebra booleana, com visto anteriormente

Mapas de Veitch-Karnaugh

- Alternativamente ao método de simplificação algébrico por fatoração, há outro método de simplificação baseado na identificação visual de grupos de mintermos que podem ser simplificados
- Para tanto, é necessário que os mintermos sejam dispostos de maneira conveniente, em tabelas conhecidas como **diagramas** ou **mapas de Veitch-Karnaugh**

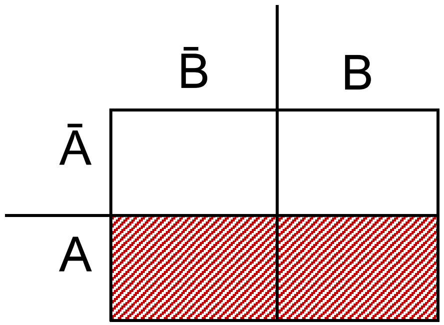
Diagrama de Veitch-Karnaugh para 2 Variáveis

- Em um mapa de Veitch-Karnaugh, há uma região própria para cada linha da tabela verdade
- Essas regiões são os locais ondem devem ser colocados os valores que a expressão S assume nas diferentes possibilidades
- Para obter a expressão simplificada por meio do diagrama
  - Agrupar as regiões onde S=1 no menor número possível de **pares** (diagonais não são permitidas no agrupamento de pares)
  - As regiões onde S=1 que não puderem ser agrupadas em pares são consideradas isoladamente

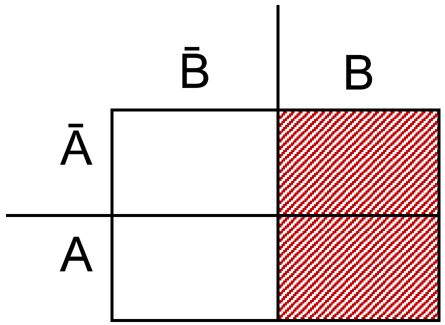
Situação	A	B	S
0	0	0	
1	0	1	
2	1	0	
3	1	1	

	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$	$\bar{A}\,\bar{B}$ 0 0 Situação 0	$\bar{A}\,B$ 0 1 Situação 1
A	$A\,\bar{B}$ 1 0 Situação 2	$A\,B$ 1 1 Situação 3

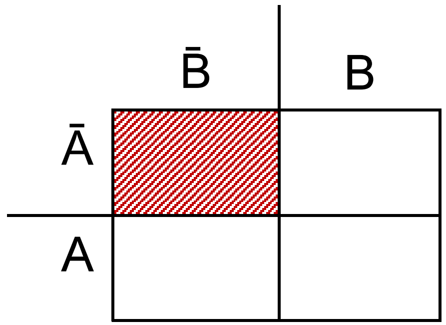
Diagrama de Veitch-Karnaugh para 2 Variáveis



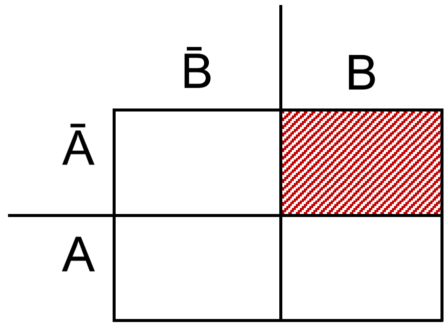
Região A (A=1)



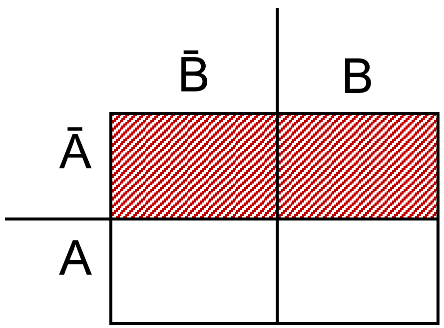
Região B (B=1)



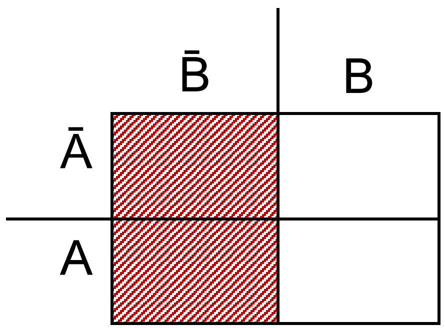
Região $\bar{A}.\bar{B}$
(A=0 e B=0)



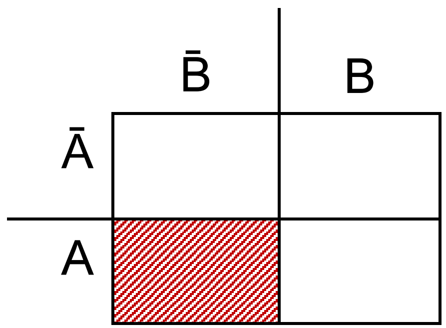
Região $\bar{A}$.B
(A=0 e B=1)



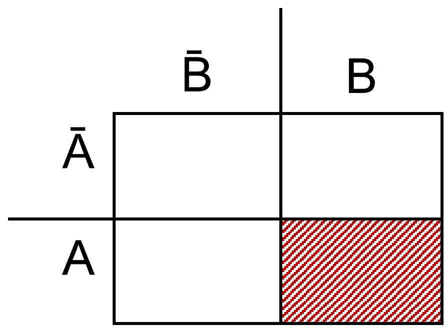
Região $\bar{A}$ (A=0)



Região $\bar{B}$ (B=0)



Região A.$\bar{B}$
(A=1 e B=0)



Região A.B
(A=1 e B=1)

Exemplo

- A tabela verdade mostra o estudo de uma função
- A expressão booleana da função S obtida da tabela verdade usando mintermos é
  - $S = \bar{A}.B + A.\bar{B} + A.B$
- Obtenha uma expressão equivalente, simplificada usando mapa de Veitch-Karnaugh

Situação	A	B	S
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	1

	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$		
A		

Exemplo

- Inicialmente, o diagrama é preenchido com cada situação da tabela verdade

Situação	A	B	S
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	1

	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$		
A		

Exemplo

- Inicialmente, o diagrama é preenchido com cada situação da tabela verdade

Situação	A	B	S
0	0	0	**0**
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	1

	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$	**0**	
A		

Exemplo

- Inicialmente, o diagrama é preenchido com cada situação da tabela verdade

Situação	A	B	S
0	0	0	0
1	0	1	**1**
2	1	0	1
3	1	1	1

	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$	0	**1**
A		

Exemplo

- Inicialmente, o diagrama é preenchido com cada situação da tabela verdade

Situação	A	B	S
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	**1**
3	1	1	1

	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$	0	1
A	**1**	

Exemplo

- Inicialmente, o diagrama é preenchido com cada situação da tabela verdade

Situação	A	B	S
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	**1**

	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$	0	1
A	1	**1**

Exemplo

- Agora tentamos agrupar as regiões onde S=1 no menor número possível de pares
- Um par é o conjunto de duas regiões onde S=1 que tem um lado em comum, ou seja, são vizinhos

Situação	A	B	S
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	1

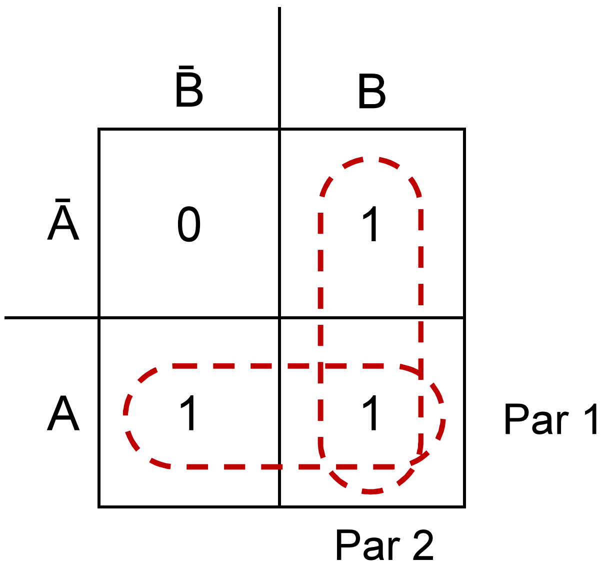
	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$	0	1
A	1	1

Par 1

Exemplo

- Agora tentamos agrupar as regiões onde S=1 no menor número possível de pares
- Um par é o conjunto de duas regiões onde S=1 que tem um lado em comum, ou seja, são vizinhos
- Um mesmo valor 1 pode pertencer a mais de um par

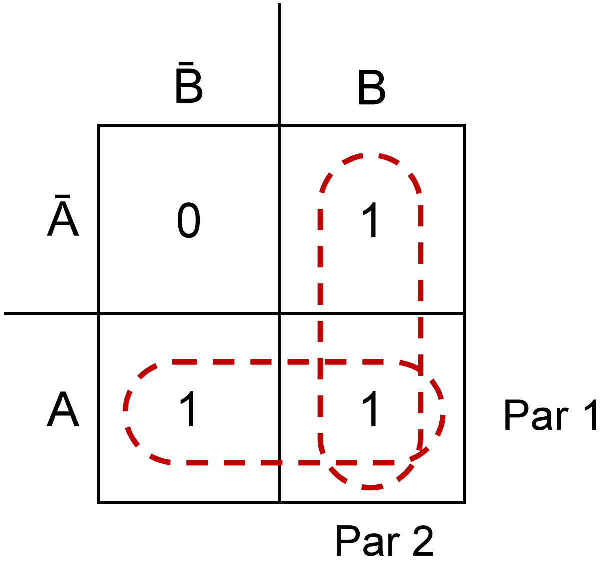
Situação	A	B	S
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	1



Exemplo

- Então, escrevemos a expressão de cada par, ou seja, a região que o par ocupa no diagrama
- O par 1 ocupa a região A=1, então sua expressão é A
- O par 2 ocupa a região onde B=1, sendo sua expressão B
- Neste caso, nenhum 1 ficou isolado, ou seja, fora dos pares
- Basta então somar os resultados de cada par
  - S = Par 1 + Par 2
  - S = A + B

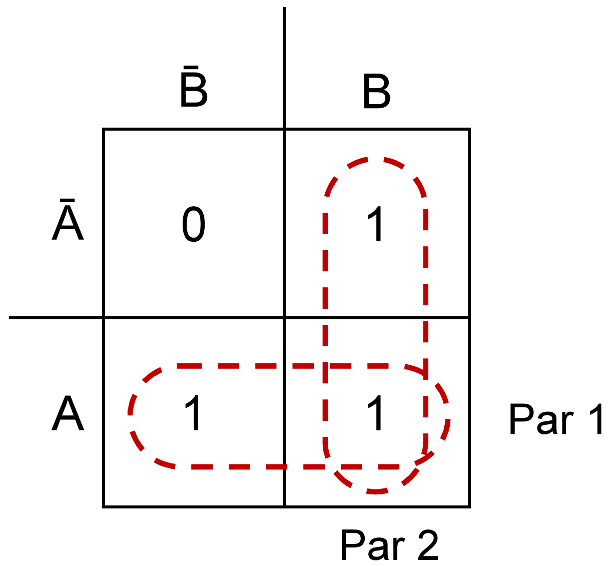
Situação	A	B	S
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	1



Exemplo

- A expressão de S obtida por mapa de Veitch-Karnaugh é
  - $S = A + B$
- Como é possível notar, essa é a expressão de uma porta **OU**, pois a tabela verdade também é da porta **OU**
- Outro ponto importante é que a expressão obtida diretamente da tabela verdade
  - $S = \bar{A}.B + A.\bar{B} + A.B$
- é visivelmente maior que a expressão minimizada

Situação	A	B	S
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	1



Exercício

- Dada a tabela ao lado, obtenha a expressão de S diretamente da tabela, usando mintermos
- A seguir, transporte a tabela para o diagrama de Veitch-Karnaugh e obtenha a expressão simplificada

Situação	A	B	S
0	0	0	1
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	0

	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$		
A		

Solução

- Dada a tabela ao lado, obtenha a expressão de S diretamente da tabela, usando mintermos
  - $S = \bar{A}.\bar{B} + \bar{A}.B + A.\bar{B}$
- A seguir, transporte a tabela para o diagrama de Veitch-Karnaugh e obtenha a expressão simplificada
  - S = Par 1 + Par 2
  - $S = \bar{A} + \bar{B}$
- Nota-se que a tabela verdade é a de uma porta **NAND**, cuja expressão é S=(A.B)’
- Aplicando De Morgan na expressão encontrada, tem-se
  - $S = \bar{A} + \bar{B} = (A.B)'$

Situação	A	B	S
0	0	0	1
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	0

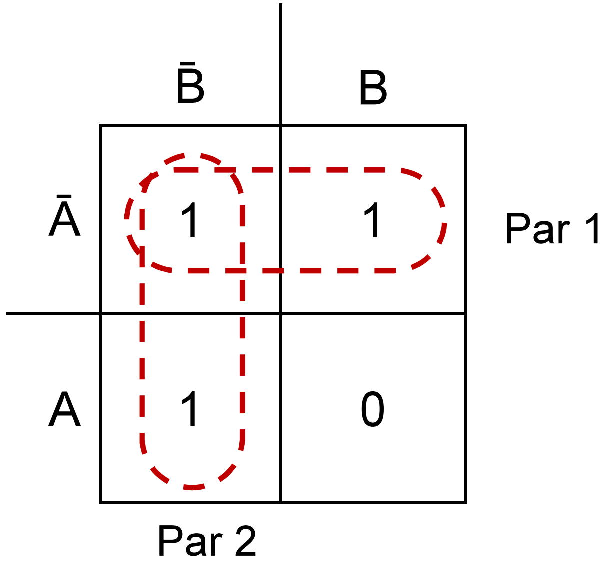


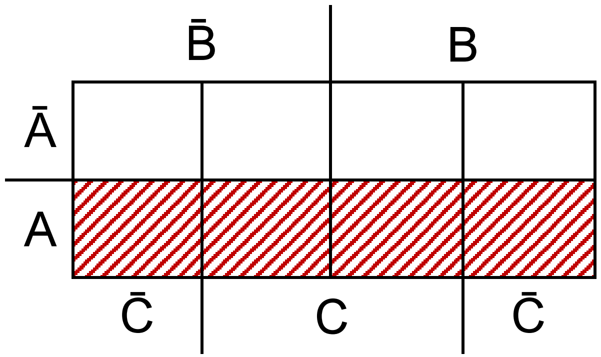
Diagrama de Veitch-Karnaugh para 3 Variáveis

- De forma análoga para 2 variáveis, com 3 variáveis também há uma região própria para cada linha da tabela verdade em um mapa de Veitch-Karnaugh
- Para obter a expressão simplificada por meio do diagrama
  - Agrupar as regiões onde S=1 no menor número possível de **quadras**
  - Em seguida, agrupar as regiões onde S=1 no menor número possível de **pares**
  - As regiões onde S=1 que não puderem ser agrupadas em quadras ou pares são consideradas isoladamente

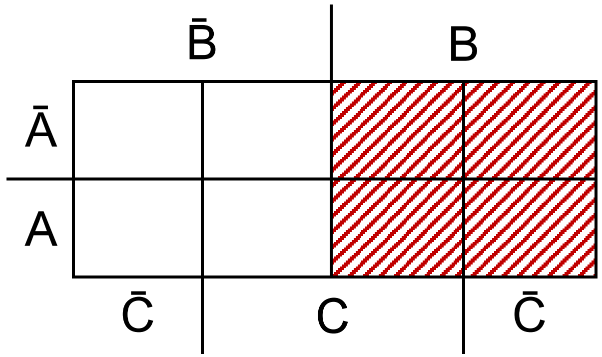
Situação	A	B	C	S
0	0	0	0	
1	0	0	1	
2	0	1	0	
3	0	1	1	
4	1	0	0	
5	1	0	1	
6	1	1	0	
7	1	1	1	

	$\bar{B}$		B	
$\bar{A}$	$\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}$ 0 0 0 Situação 0	$\bar{A}\,\bar{B}\,C$ 0 0 1 Situação 1	$\bar{A}\,B\,C$ 0 1 1 Situação 3	$\bar{A}\,B\,\bar{C}$ 0 1 0 Situação 2
A	$A\,\bar{B}\,\bar{C}$ 1 0 0 Situação 4	$A\,\bar{B}\,C$ 1 0 1 Situação 5	$A\,B\,C$ 1 1 1 Situação 7	$A\,B\,\bar{C}$ 1 1 0 Situação 6
	$\bar{C}$	C		$\bar{C}$

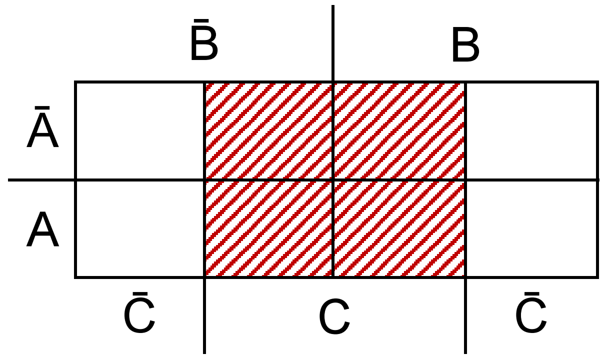
Quadras



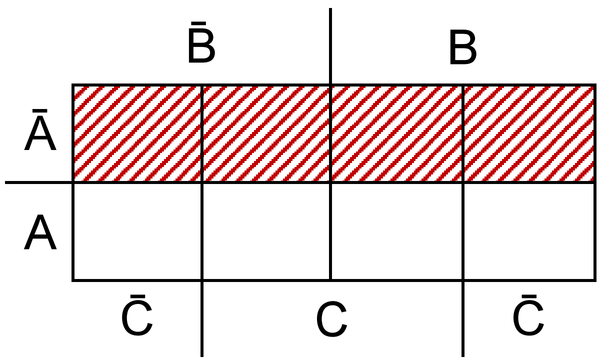
Região A=1 (Região A)



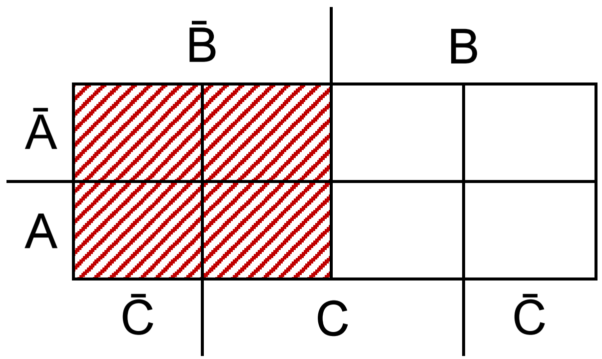
Região B=1 (Região B)



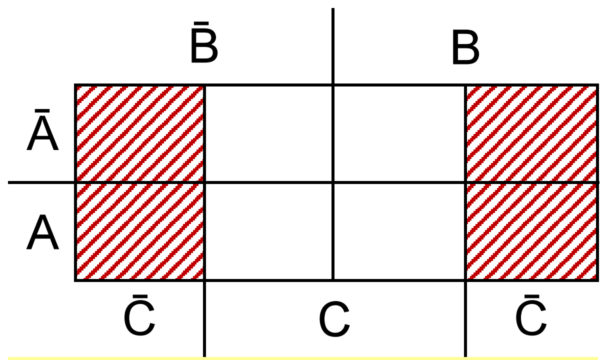
Região C=1 (Região C)



Região A=0 (Região $\bar{A}$)

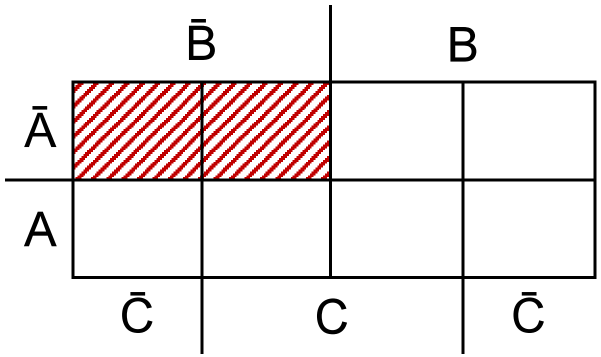


Região B=0 (Região $\bar{B}$)

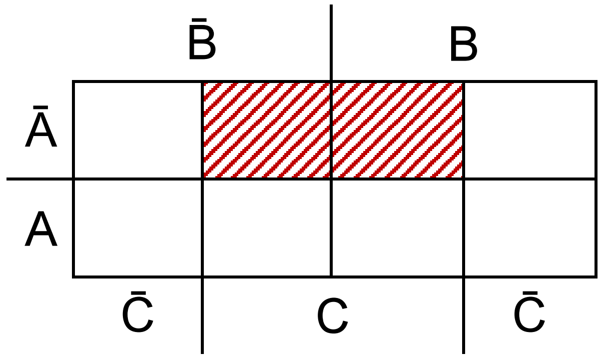


Região C=0 (Região $\bar{C}$)

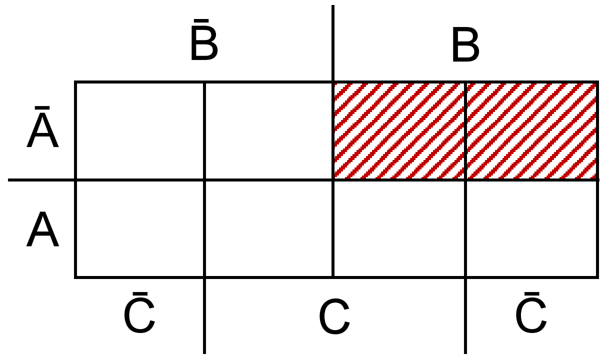
Pares (1/2)



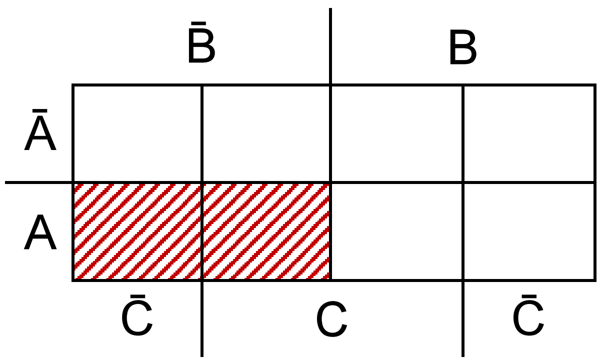
Região $\bar{A}.\bar{B}$



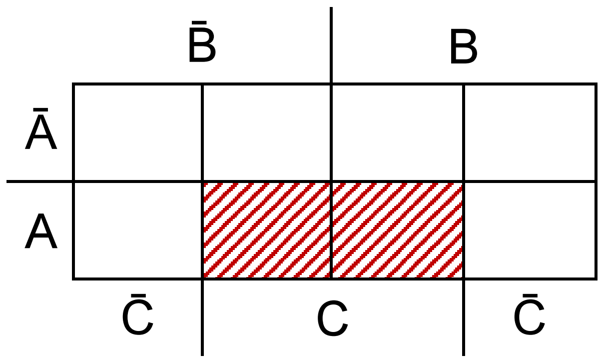
Região $\bar{A}.C$



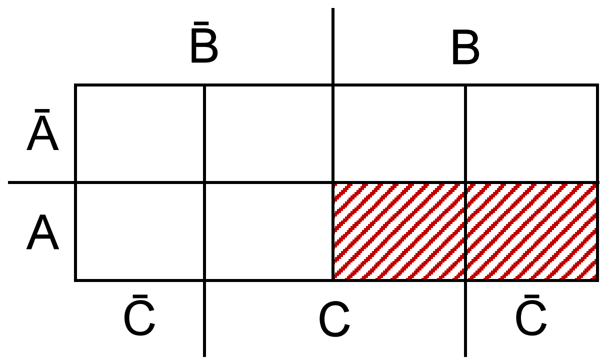
Região $\bar{A}.B$



Região $A.\bar{B}$

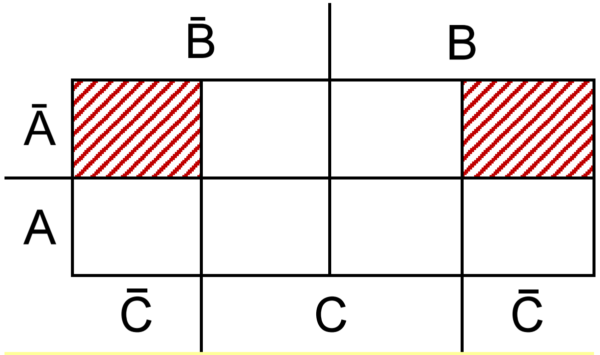


Região $A.C$

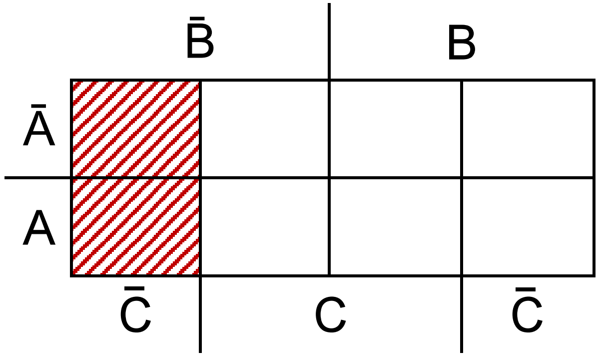


Região $A.B$

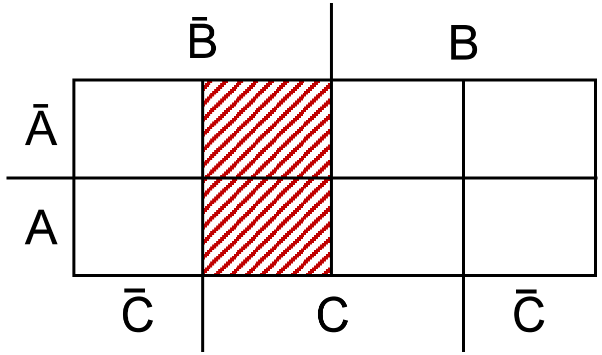
Pares (2/2)



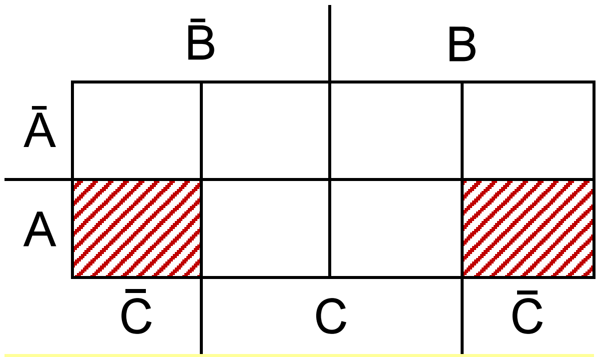
Região $\bar{A}.\bar{C}$



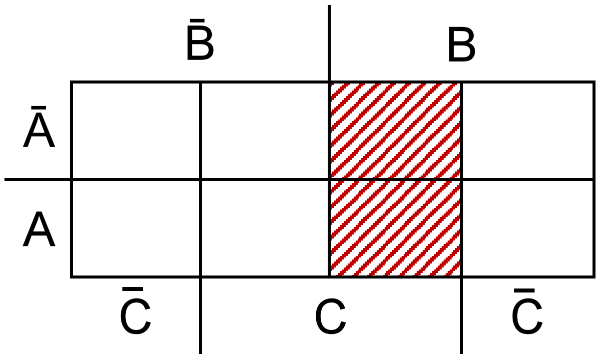
Região $\bar{B}.\bar{C}$



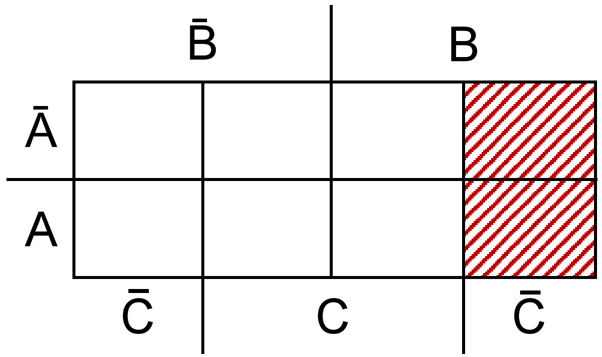
Região $\bar{B}.C$



Região $A.\bar{C}$

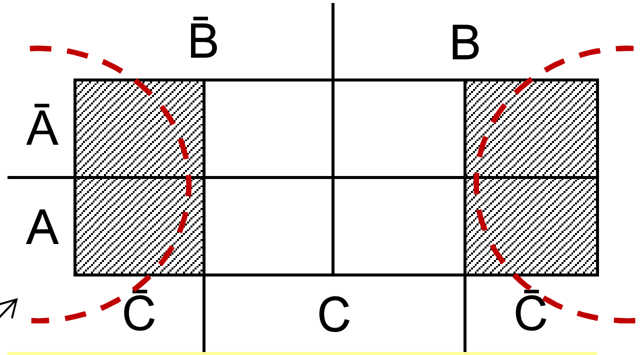


Região $B.C$



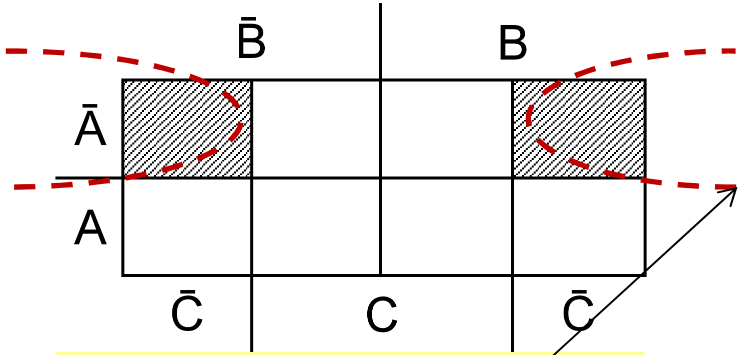
Região $B.\bar{C}$

Quadra e Pares nas Extremidades



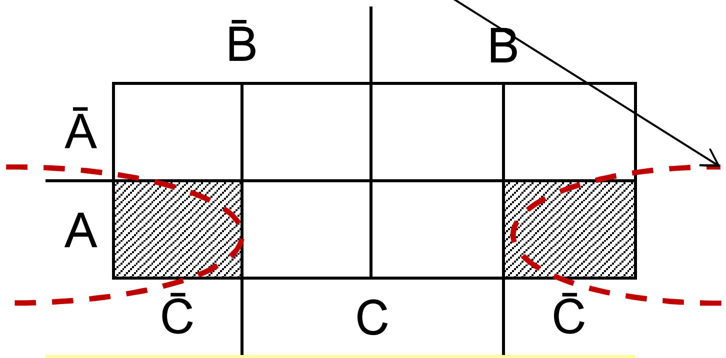
Região C=0 (Região $\bar{C}$)

Note que a região marcada corresponde a uma quadra, mesmo não estando contígua no diagrama



Região $\bar{A}.\bar{C}$

De forma análoga, estas regiões marcadas correspondem a pares

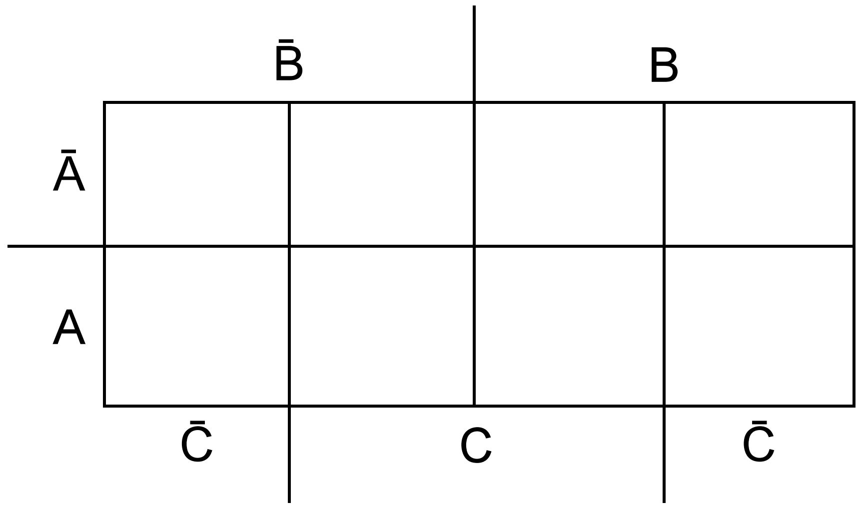


Região $A.\bar{C}$

Exemplo

- A expressão extraída diretamente da tabela verdade para S é
  - $S = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C} + \bar{A}.B.\bar{C} + \bar{A}.B.C + A.\bar{B}.\bar{C} + A.B.\bar{C}$
- Como antes, o diagrama é preenchido com cada situação da tabela verdade

Situação	A	B	C	S
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0



Exemplo

- A expressão extraída diretamente da tabela verdade para S é
  - $S = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C} + \bar{A}.B.\bar{C} + \bar{A}.B.C + A.\bar{B}.\bar{C} + A.B.\bar{C}$
- Como antes, o diagrama é preenchido com cada situação da tabela verdade

Situação	A	B	C	S
0	0	0	0	**1**
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

	$\bar{B}$		B	
$\bar{A}$	**1**			
A				
	$\bar{C}$	C		$\bar{C}$

Exemplo

- A expressão extraída diretamente da tabela verdade para S é
  - $S = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C} + \bar{A}.B.\bar{C} + \bar{A}.B.C + A.\bar{B}.\bar{C} + A.B.\bar{C}$
- Como antes, o diagrama é preenchido com cada situação da tabela verdade

Situação	A	B	C	S
0	0	0	0	1
1	0	0	1	**0**
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

	$\bar{B}$		B	
$\bar{A}$	1	**0**		
A				
	$\bar{C}$	C	C	$\bar{C}$

Exemplo

- A expressão extraída diretamente da tabela verdade para S é
  - $S = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C} + \bar{A}.B.\bar{C} + \bar{A}.B.C + A.\bar{B}.\bar{C} + A.B.\bar{C}$
- Como antes, o diagrama é preenchido com cada situação da tabela verdade

Situação	A	B	C	S
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

	$\bar{B}$		B	
$\bar{A}$	1	0		1
A				
	$\bar{C}$	C	C	$\bar{C}$

Exemplo

- A expressão extraída diretamente da tabela verdade para S é
  - $S = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C} + \bar{A}.B.\bar{C} + \bar{A}.B.C + A.\bar{B}.\bar{C} + A.B.\bar{C}$
- Como antes, o diagrama é preenchido com cada situação da tabela verdade

Situação	A	B	C	S
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	**1**
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

	$\bar{B}$		B	
$\bar{A}$	1	0	**1**	1
A				
	$\bar{C}$	C		$\bar{C}$

Exemplo

- A expressão extraída diretamente da tabela verdade para S é
  - $S = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C} + \bar{A}.B.\bar{C} + \bar{A}.B.C + A.\bar{B}.\bar{C} + A.B.\bar{C}$
- Como antes, o diagrama é preenchido com cada situação da tabela verdade

Situação	A	B	C	S
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	**1**
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

	$\bar{B}$		B	
$\bar{A}$	1	0	1	1
A	**1**			
	$\bar{C}$	C		$\bar{C}$

Exemplo

- A expressão extraída diretamente da tabela verdade para S é
  - $S = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C} + \bar{A}.B.\bar{C} + \bar{A}.B.C + A.\bar{B}.\bar{C} + A.B.\bar{C}$
- Como antes, o diagrama é preenchido com cada situação da tabela verdade

Situação	A	B	C	S
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	**0**
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

	$\bar{B}$		B	
$\bar{A}$	1	0	1	1
A	1	**0**		
	$\bar{C}$	C		$\bar{C}$

Exemplo

- A expressão extraída diretamente da tabela verdade para S é
  - $S = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C} + \bar{A}.B.\bar{C} + \bar{A}.B.C + A.\bar{B}.\bar{C} + A.B.\bar{C}$
- Como antes, o diagrama é preenchido com cada situação da tabela verdade

Situação	A	B	C	S
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	**1**
7	1	1	1	0

	$\bar{B}$		B	
$\bar{A}$	1	0	1	1
A	1	0		**1**
	$\bar{C}$	C		$\bar{C}$

Exemplo

- A expressão extraída diretamente da tabela verdade para S é
  - $S = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C} + \bar{A}.B.\bar{C} + \bar{A}.B.C + A.\bar{B}.\bar{C} + A.B.\bar{C}$
- Como antes, o diagrama é preenchido com cada situação da tabela verdade

Situação	A	B	C	S
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	**0**

	$\bar{B}$		B	
$\bar{A}$	1	0	1	1
A	1	0	**0**	1
	$\bar{C}$	C		$\bar{C}$

Exemplo

- Agora tentamos agrupar as regiões onde S=1 no menor número possível de quadras

Situação	A	B	C	S
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

	$\bar{B}$		B	
$\bar{A}$	1	0	1	1
A	1	0	0	1
	$\bar{C}$	C		$\bar{C}$

Exemplo

- Agora tentamos agrupar as regiões onde S=1 no menor número possível de quadras
- No exemplo, tem-se a quadra $\bar{C}$
- Como nenhuma quadra adicional pode ser encontrada, tentamos localizar agora o menor número de pares
  - Não devem ser considerados os pares já incluídos em quadras
  - Contudo, pode acontecer de um par ser composto por um 1 externo e outro interno a uma quadra

Situação	A	B	C	S
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

	$\bar{B}$		B	
$\bar{A}$	1	0	1	1
A	1	0	0	1
	$\bar{C}$	C	C	$\bar{C}$

Exemplo

- Agora tentamos agrupar as regiões onde S=1 no menor número possível de quadras
- No exemplo, tem-se a quadra $\bar{C}$
- Como nenhuma quadra adicional pode ser encontrada, tentamos localizar agora o menor número de pares
  - Não devem ser considerados os pares já incluídos em quadras
  - Contudo, pode acontecer de um par ser composto por um 1 externo e outro interno a uma quadra
- No exemplo, tem-se o par $\bar{A}.B$

Situação	A	B	C	S
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

	$\bar{B}$		B	
	$\bar{C}$	C	C	$\bar{C}$
$\bar{A}$	1	0	1	1
A	1	0	0	1

Exemplo

- Agora tentamos agrupar as regiões onde S=1 no menor número possível de quadras
- No exemplo, tem-se a quadra $\bar{C}$
- Como nenhuma quadra adicional pode ser encontrada, tentamos localizar agora o menor número de pares
  - Não devem ser considerados os pares já incluídos em quadras
  - Contudo, pode acontecer de um par ser composto por um 1 externo e outro interno a uma quadra
- No exemplo, tem-se o par $\bar{A}.B$
- Por último, resta considerar termos isolados, que não foram agrupados nem em quadras, nem em pares
- No exemplo, não temos nenhum termo isolado

Situação	A	B	C	S
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

	$\bar{B}$		B	
$\bar{A}$	1	0	1	1
A	1	0	0	1
	$\bar{C}$	C	C	$\bar{C}$

Exemplo

- Agora, basta somar as expressões referentes às quadras, pares e termos isolados
- No exemplo, temos
  - Quadra $\bar{C}$
  - Par $\bar{A}.B$
- A expressão final minimizada é
  - $S = \bar{C} + \bar{A}.B$
- Comparando com a expressão antes da minimização, é possível notar a redução do número de portas e operações necessárias para obter-se o mesmo resultado
  - $S = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C} + \bar{A}.B.\bar{C} + \bar{A}.B.C + A.\bar{B}.\bar{C} + A.B.\bar{C}$

Situação	A	B	C	S
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

	$\bar{B}$		B	
$\bar{A}$	1	0	1	1
A	1	0	0	1
	$\bar{C}$	C	C	$\bar{C}$

Exercício

- Minimizar o circuito que executa a tabela verdade ao lado

Situação	A	B	C	S
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

	$\bar{B}$		B	
$\bar{A}$				
A				
	$\bar{C}$	C	C	$\bar{C}$

Exercício

- Minimizar o circuito que executa a tabela verdade ao lado
- Lembrar de agrupar as quadras, depois os pares e por últimos os termos isolados

Situação	A	B	C	S
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

	$\bar{B}$		B	
$\bar{A}$	0	1	1	0
A	1	1	0	1
	$\bar{C}$	C		$\bar{C}$

Solução

- Minimizar o circuito que executa a tabela verdade ao lado
- Lembrar de agrupar as quadras, depois os pares e por últimos os termos isolados
- Nesse caso, há apenas 3 pares
  - $\bar{A}.C$
  - $A.\bar{B}$
  - $A.\bar{C}$
- Portanto, a expressão minimizada é
  - $S = \bar{A}.C + A.\bar{B} + A.\bar{C}$

Situação	A	B	C	S
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

	$\bar{B}$		B	
$\bar{A}$	0	1	1	0
A	1	1	0	1
	$\bar{C}$	C		$\bar{C}$

Solução

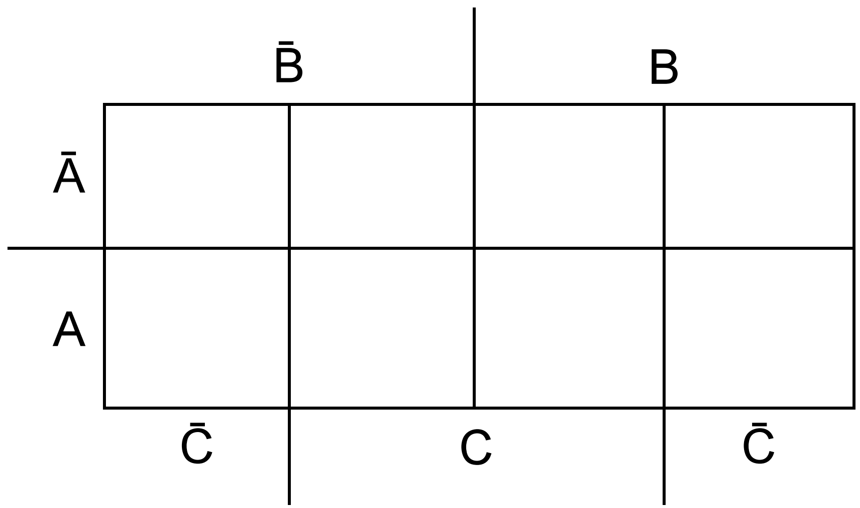
- Minimizar o circuito que executa a tabela verdade ao lado
- Lembrar de agrupar as quadras, depois os pares e por últimos os termos isolados
- Nesse caso, há apenas 3 pares
  - $\bar{A}.C$
  - $A.\bar{B}$
  - $A.\bar{C}$
- Portanto, a expressão minimizada é
  - $S = \bar{A}.C + A.\bar{B} + A.\bar{C}$
- Poderíamos também ter agrupado da seguinte maneira, gerando a expressão
  - $S = \bar{A}.C + \bar{B}.C + A.\bar{C}$
- Essas duas expressões, sintaticamente diferentes, são semanticamente equivalentes, pois possuem o mesmo comportamento em cada situação da tabela verdade

Situação	A	B	C	S
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

	$\bar{B}$		B	
$\bar{A}$	0	1	1	0
A	1	1	0	1
	$\bar{C}$	C		$\bar{C}$

Exercício

- Simplifique a expressão, utilizando diagrama de Veitch-Karnaugh
  - $S = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C} + \bar{A}.\bar{B}.C + \bar{A}.B.C + A.\bar{B}.C + A.B.C$



Solução

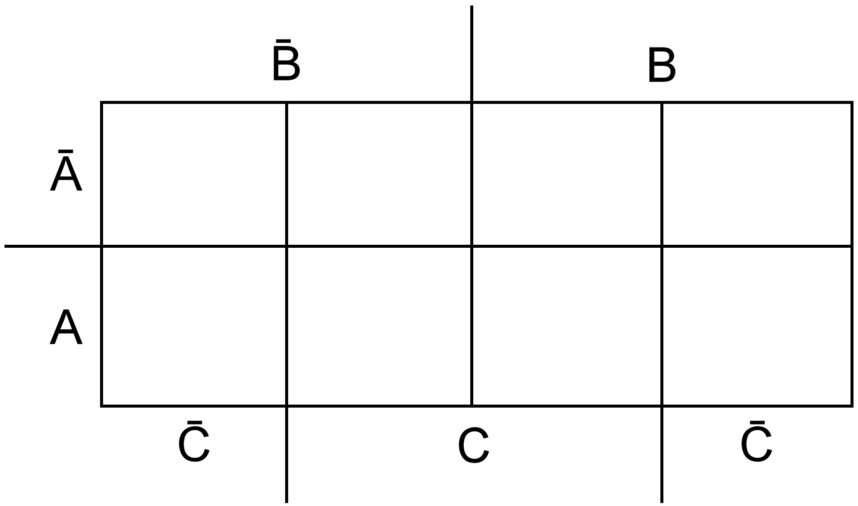
- Simplifique a expressão, utilizando diagrama de Veitch-Karnaugh
  - $S = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C} + \bar{A}.\bar{B}.C + \bar{A}.B.C + A.\bar{B}.C + A.B.C$
- Após a minimização, obtém-se
  - $S = C + \bar{A}.\bar{B}$

Situação	A	B	C	S
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

	$\bar{B}$	$\bar{B}$	B	B
$\bar{A}$	1	1	1	0
A	0	1	1	0
	$\bar{C}$	C	C	$\bar{C}$

Exercício

- Simplifique a expressão, utilizando diagrama de Veitch-Karnaugh
- Tente montar o diagrama sem escrever a tabela verdade
  - $S = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C} + \bar{A}.B.\bar{C} + \bar{A}.B.C + A.B.C$



Exercício

- Simplifique a expressão, utilizando diagrama de Veitch-Karnaugh
- Tente montar o diagrama sem escrever a tabela verdade
  - $S = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C} + \bar{A}.B.\bar{C} + \bar{A}.B.C + A.B.C$

	$\bar{B}$		B	
$\bar{A}$	$\bar{A}.\bar{B}.\bar{C}$		$\bar{A}.B.C$	$\bar{A}.B.\bar{C}$
A			$A.B.C$	
	$\bar{C}$	C	C	$\bar{C}$

Solução

- Simplifique a expressão, utilizando diagrama de Veitch-Karnaugh
  - $S = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C} + \bar{A}.B.\bar{C} + \bar{A}.B.C + A.B.C$
- Após a minimização, obtém-se
  - $S = \bar{A}.\bar{C} + B.C$

Situação	A	B	C	S
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

	$\bar{B}$		B	
$\bar{A}$	1	0	1	1
A	0	0	1	0
	$\bar{C}$	C	C	$\bar{C}$

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 4 Variáveis

- Nesse caso, para obter a expressão simplificada por meio do diagrama
  - Agrupar as regiões onde S=1 no menor número possível de **oitavas**
  - Em seguida, agrupar as regiões onde S=1 no menor número possível de **quadras**
  - Em seguida, agrupar as regiões onde S=1 no menor número possível de **pares**
  - As regiões onde S=1 que não puderem ser agrupadas em oitavas, quadras ou pares são consideradas isoladamente
- No diagrama, os lados **extremos opostos se comunicam**, podendo formar oitavas, quadras ou pares

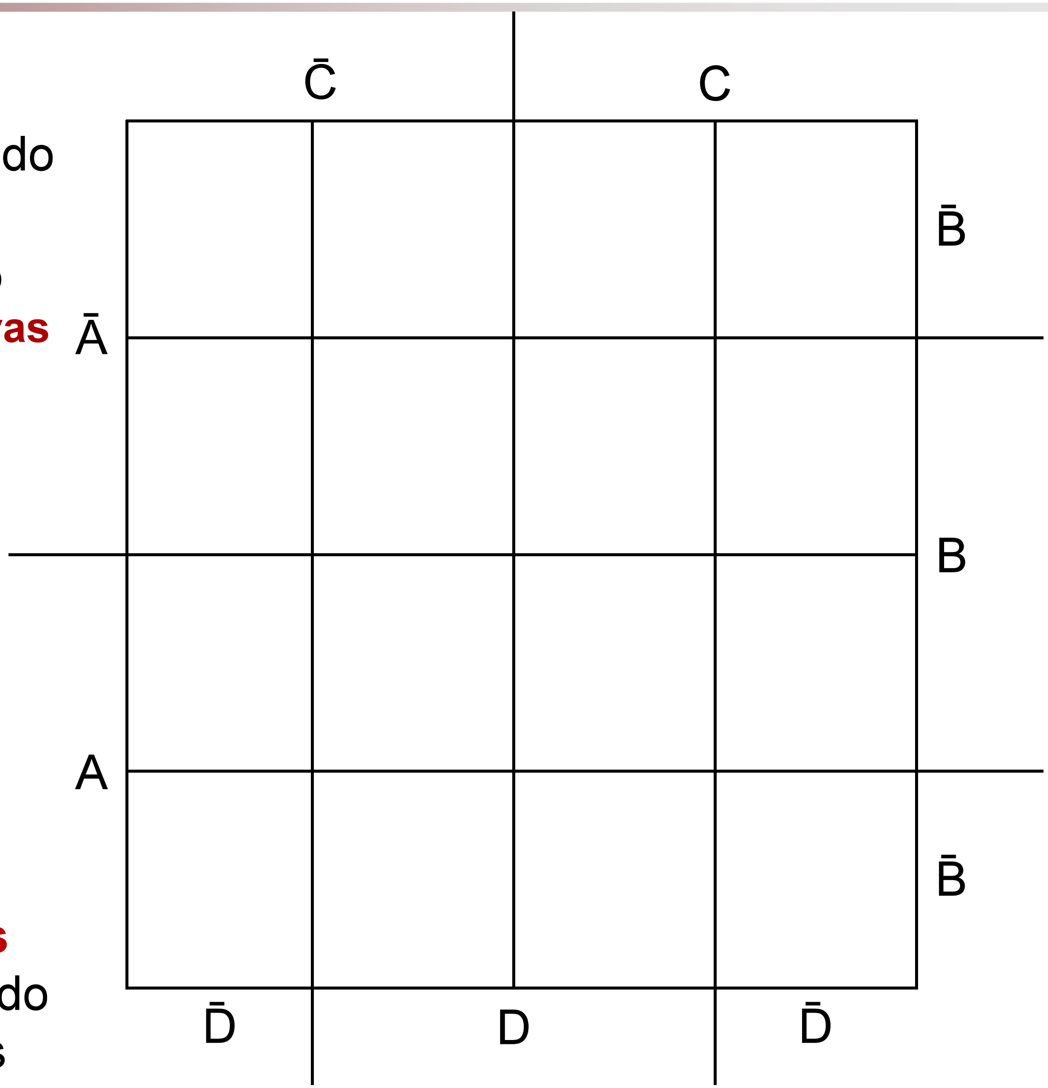


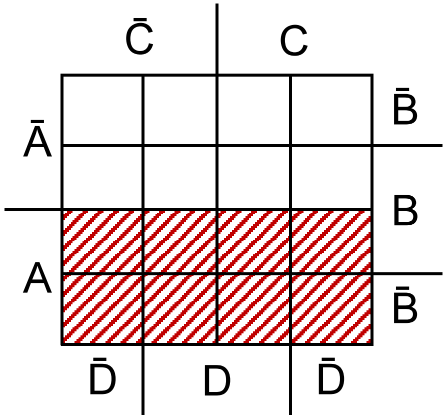
Diagrama de Veitch-Karnaugh para 4 Variáveis

- Como antes, há uma região para cada linha na tabela verdade

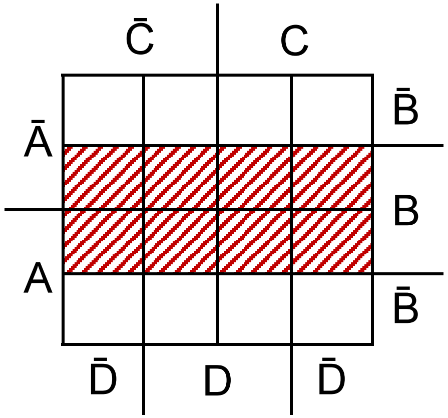
Situação	A	B	C	D	S
0	0	0	0	0	
1	0	0	0	1	
2	0	0	1	0	
3	0	0	1	1	
4	0	1	0	0	
5	0	1	0	1	
6	0	1	1	0	
7	0	1	1	1	
8	1	0	0	0	
9	1	0	0	1	
10	1	0	1	0	
11	1	0	1	1	
12	1	1	0	0	
13	1	1	0	1	
14	1	1	1	0	
15	1	1	1	1	

	$\bar{C}$		C		
$\bar{A}$	$\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D}$ 0 0 0 0 Situação 0	$\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\,D$ 0 0 0 1 Situação 1	$\bar{A}\,\bar{B}\,C\,D$ 0 0 1 1 Situação 3	$\bar{A}\,\bar{B}\,C\,\bar{D}$ 0 0 1 0 Situação 2	$\bar{B}$
$\bar{A}$	$\bar{A}\,B\,\bar{C}\,\bar{D}$ 0 1 0 0 Situação 4	$\bar{A}\,B\,\bar{C}\,D$ 0 1 0 1 Situação 5	$\bar{A}\,B\,C\,D$ 0 1 1 1 Situação 7	$\bar{A}\,B\,C\,\bar{D}$ 0 1 1 0 Situação 6	B
A	$A\,B\,\bar{C}\,\bar{D}$ 1 1 0 0 Situação 12	$AB\,\bar{C}\,D$ 1 1 0 1 Situação 13	$A\,B\,C\,D$ 1 1 1 1 Situação 15	$A\,B\,C\,\bar{D}$ 1 1 1 0 Situação 14	B
A	$A\,\bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D}$ 1 0 0 0 Situação 8	$A\,\bar{B}\,\bar{C}\,D$ 1 0 0 1 Situação 9	$A\,\bar{B}\,C\,D$ 1 0 1 1 Situação 11	$A\,\bar{B}\,C\,\bar{D}$ 1 0 1 0 Situação 10	$\bar{B}$
	$\bar{D}$	D	D	$\bar{D}$	

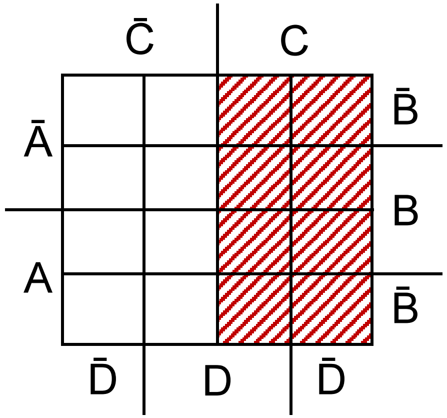
Oitavas



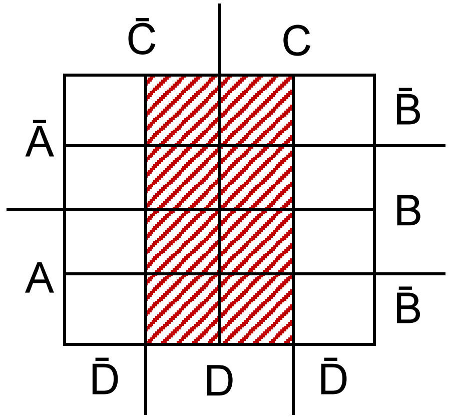
Região A=1 (Região A)



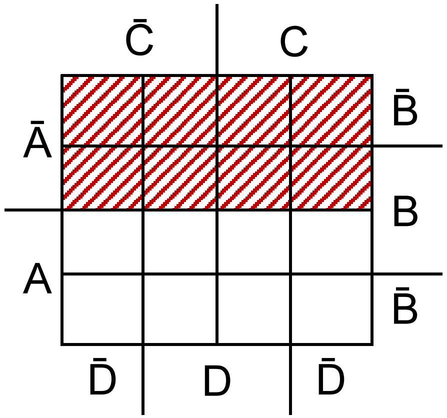
Região B=1 (Região B)



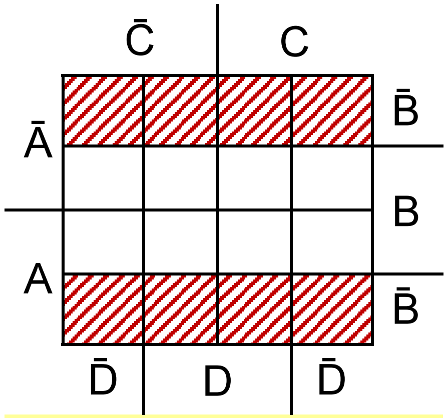
Região C=1 (Região C)



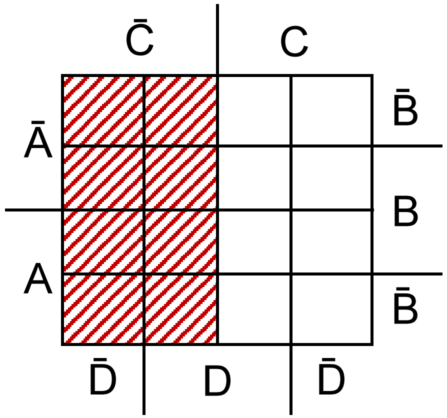
Região D=1 (Região D)



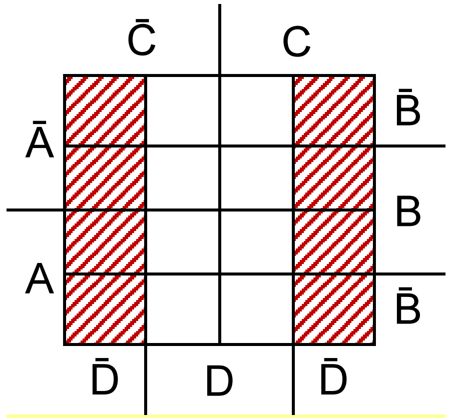
Região A=0 (Região $\bar{A}$)



Região B=0 (Região $\bar{B}$)

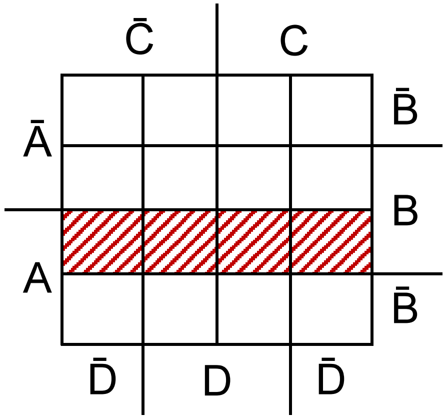


Região C=0 (Região $\bar{C}$)

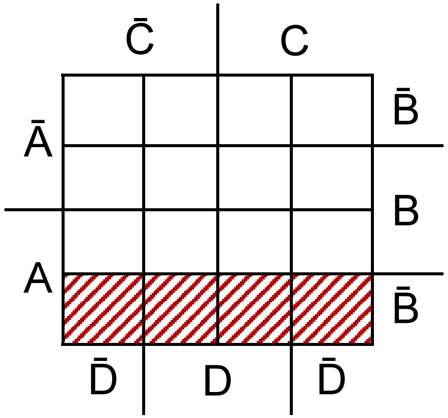


Região D=0 (Região $\bar{D}$)

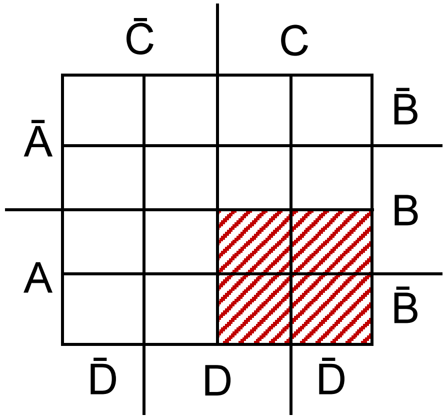
Quadras (1/3)



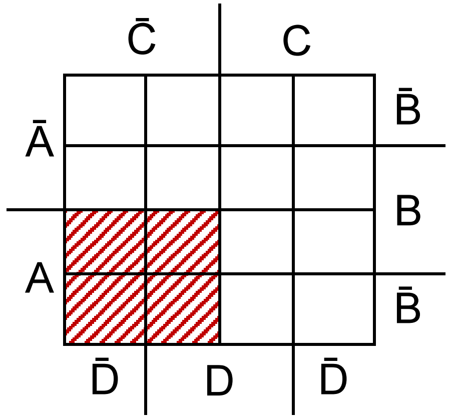
Região A.B



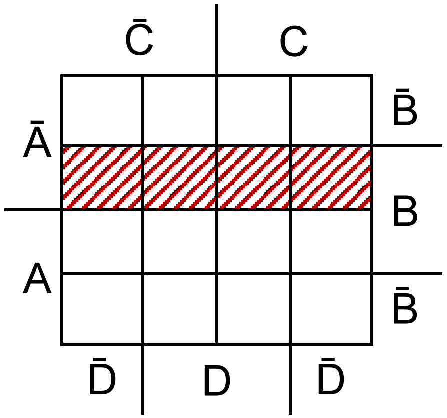
Região A.$\bar{B}$



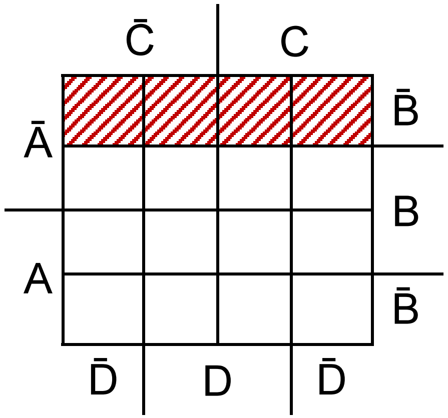
Região A.C



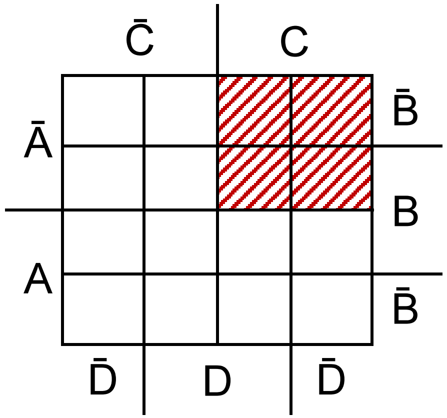
Região A.$\bar{C}$



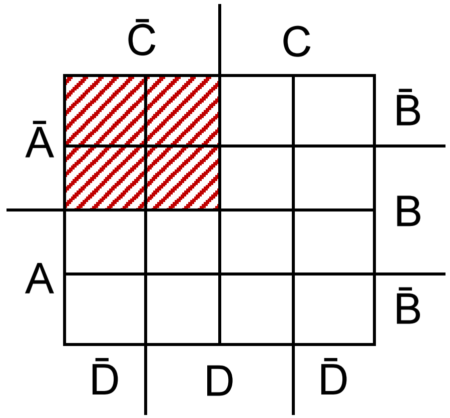
Região $\bar{A}$.B



Região $\bar{A}$.$\bar{B}$

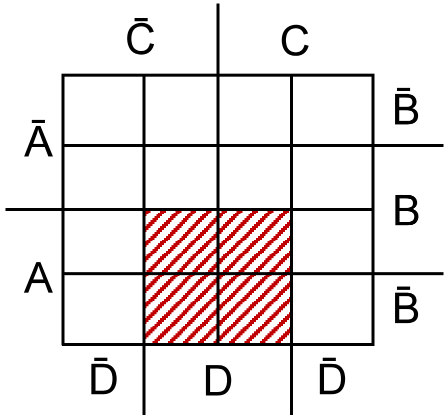


Região $\bar{A}$.C

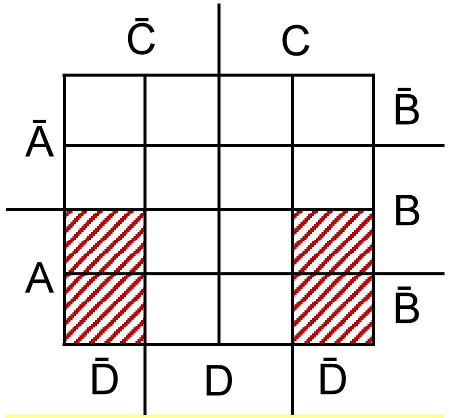


Região $\bar{A}$.$\bar{C}$

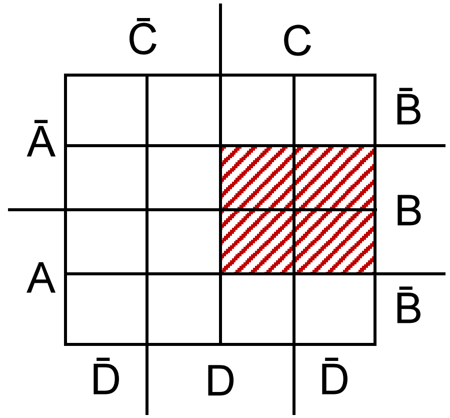
Quadras (2/3)



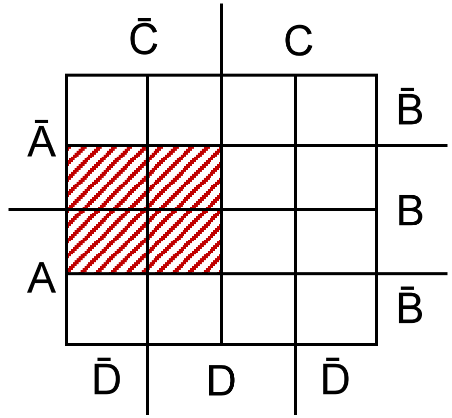
Região $A.D$



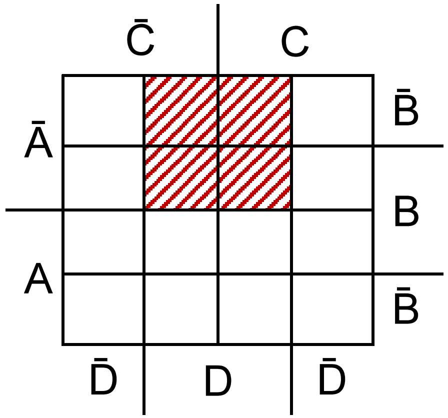
Região $A.\bar{D}$



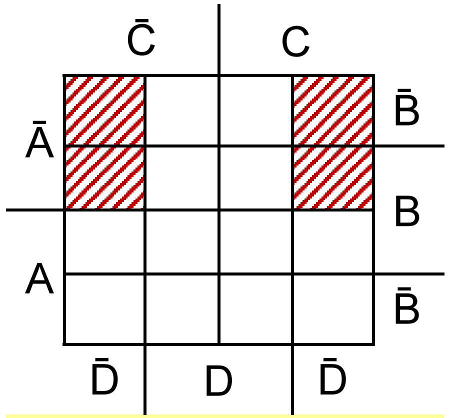
Região $B.C$



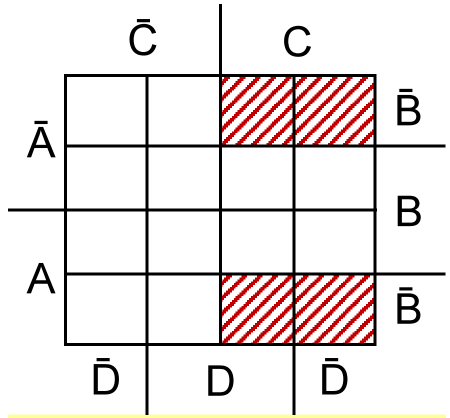
Região $B.\bar{C}$



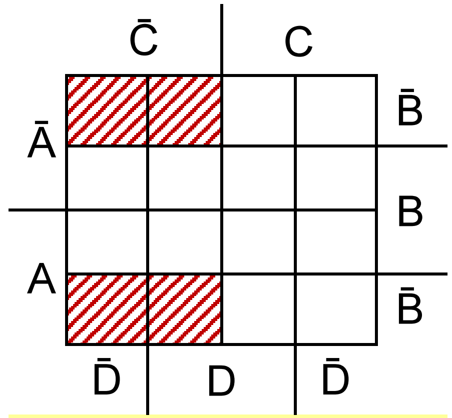
Região $\bar{A}.D$



Região $\bar{A}.\bar{D}$

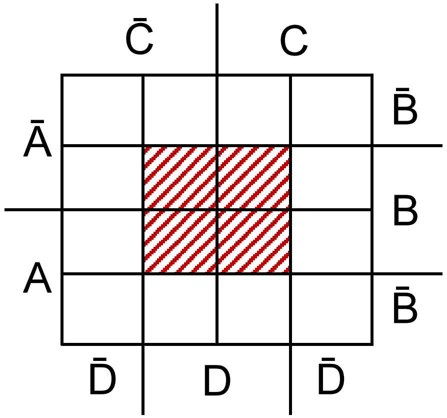


Região $\bar{B}.C$

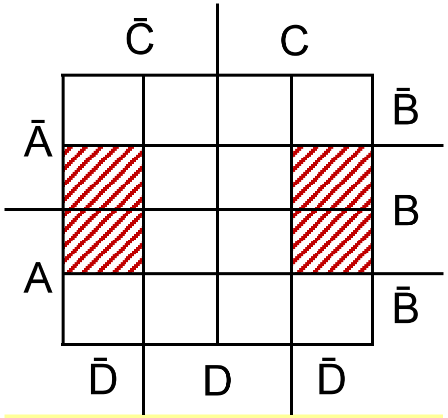


Região $\bar{B}.\bar{C}$

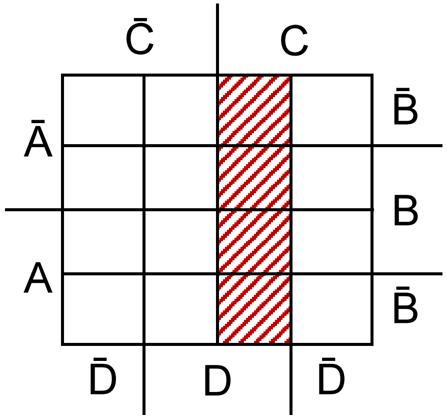
Quadras (3/3)



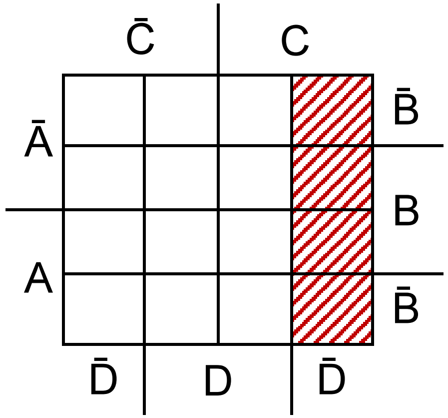
Região B.D



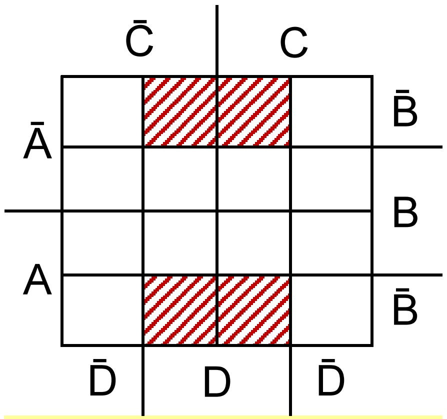
Região B.$\bar{D}$



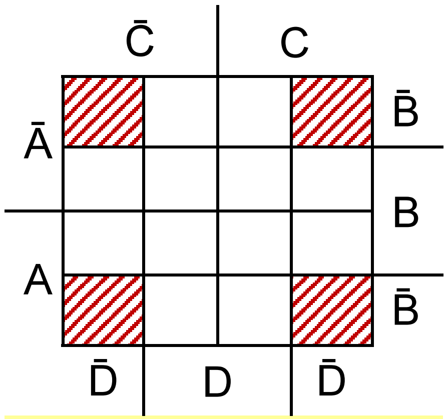
Região C.D



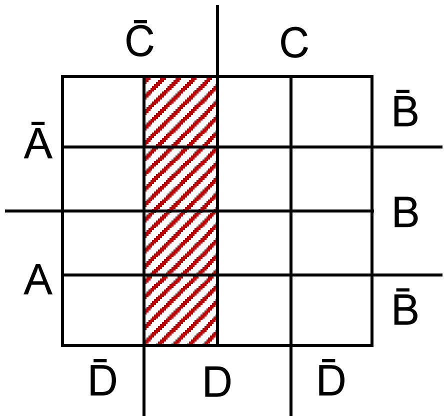
Região C.$\bar{D}$



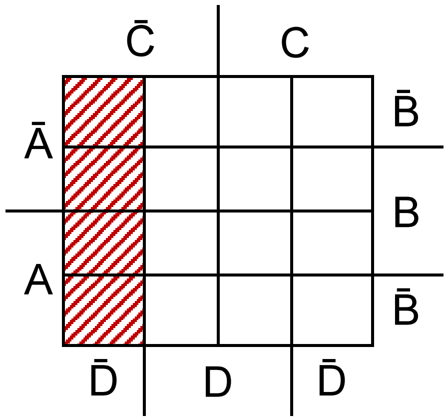
Região $\bar{B}$.D



Região $\bar{B}$.$\bar{D}$

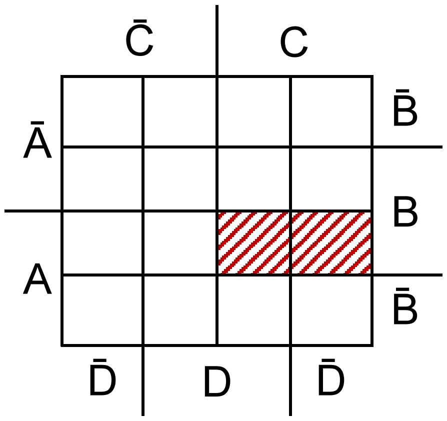


Região $\bar{C}$.D

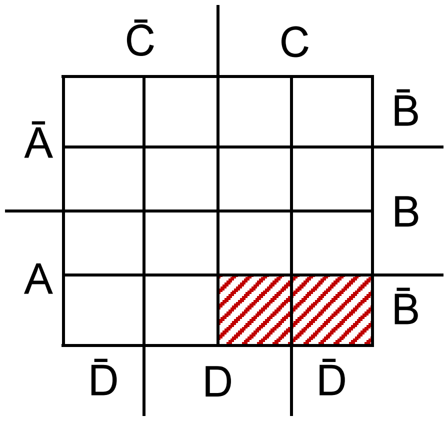


Região $\bar{C}$.D

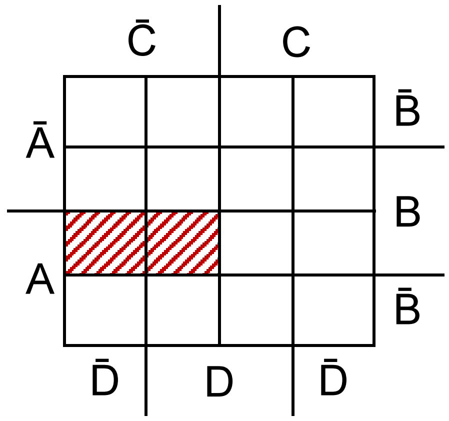
Pares (1/4)



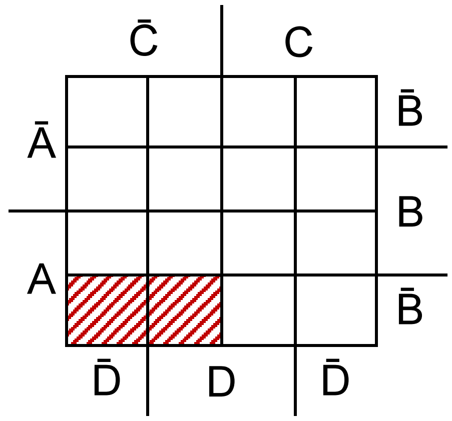
Região $A.B.C$



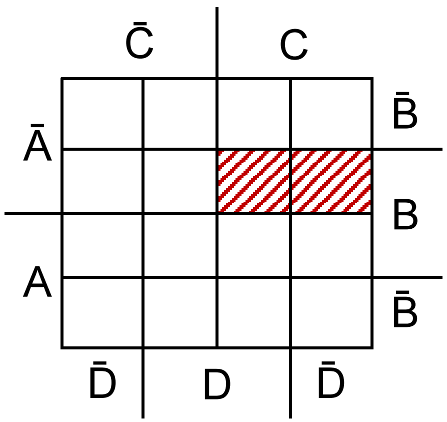
Região $A.\bar{B}.C$



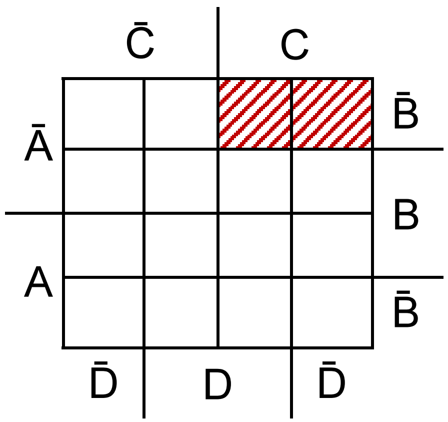
Região $A.B.\bar{C}$



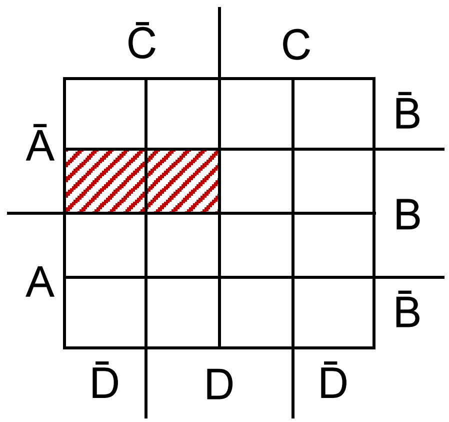
Região $A.\bar{B}.\bar{C}$



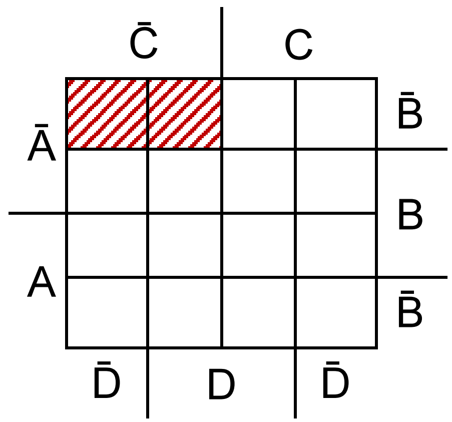
Região $\bar{A}.B.C$



Região $\bar{A}.\bar{B}.C$

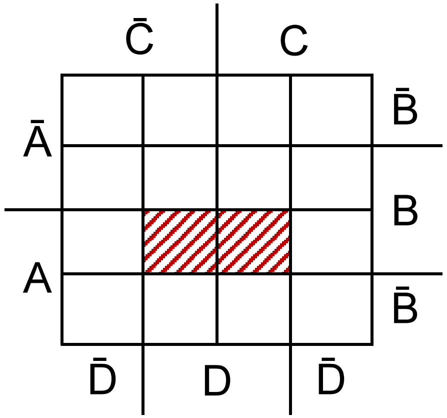


Região $\bar{A}.B.\bar{C}$

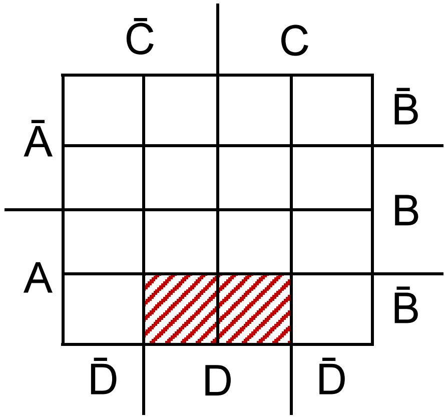


Região $\bar{A}.\bar{B}.\bar{C}$

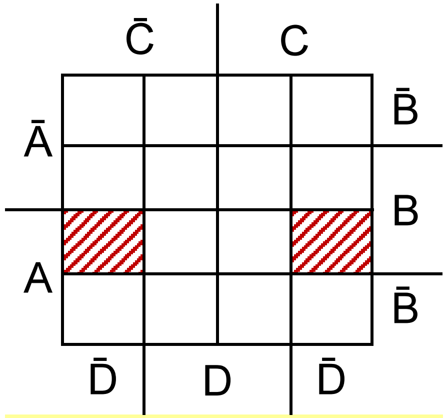
Pares (2/4)



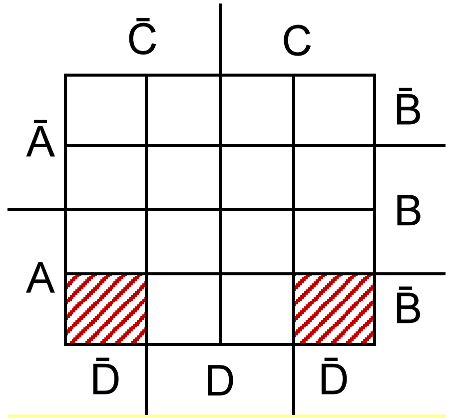
Região A.B.D



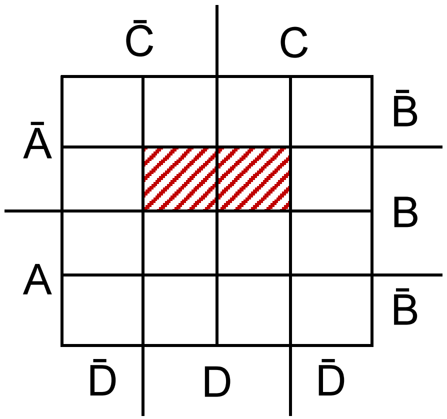
Região A.$\bar{B}$.D



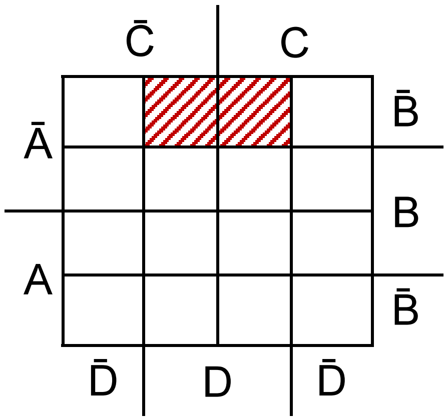
Região A.B.$\bar{D}$



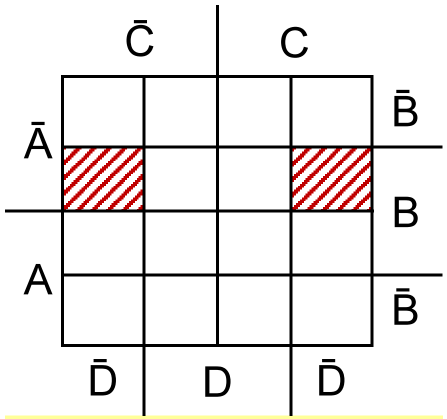
Região A.$\bar{B}$.$\bar{D}$



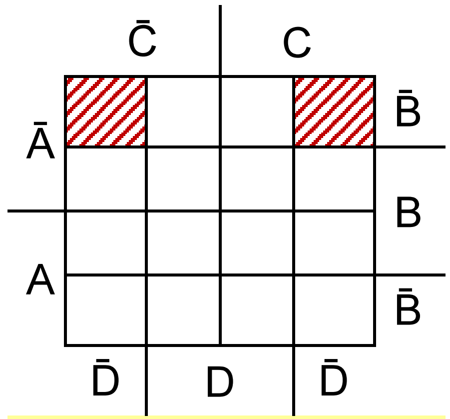
Região $\bar{A}$.B.D



Região $\bar{A}$.$\bar{B}$.D

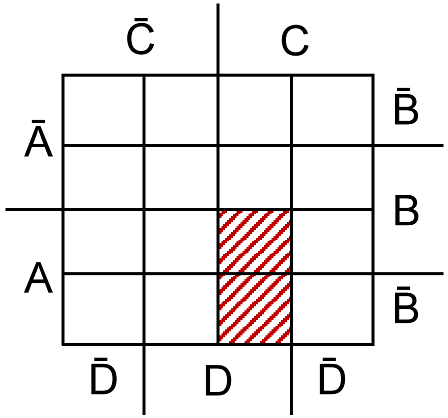


Região $\bar{A}$.B.$\bar{D}$

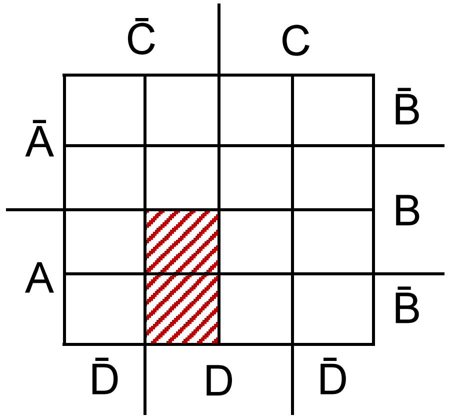


Região $\bar{A}$.$\bar{B}$.$\bar{D}$

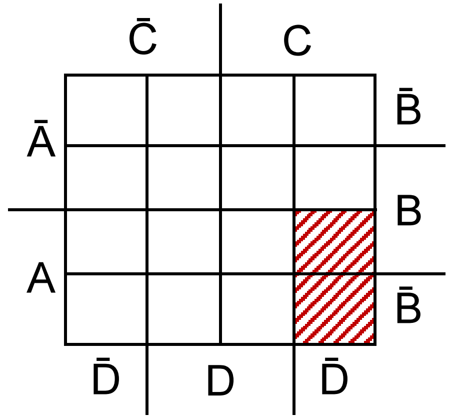
Pares (3/4)



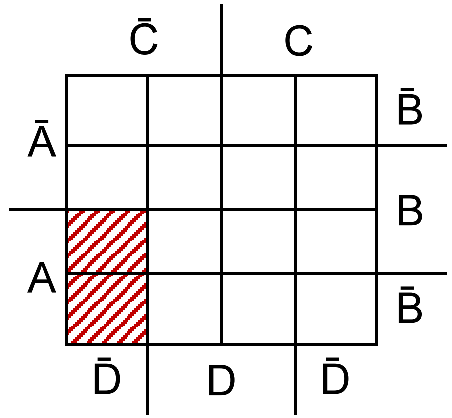
Região A.C.D



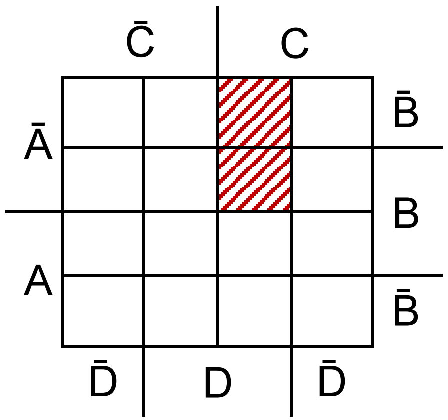
Região $A.\bar{C}.D$



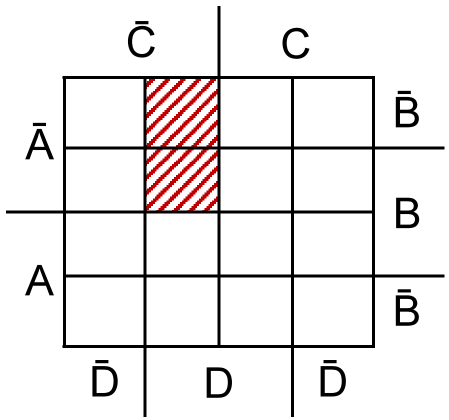
Região $A.C.\bar{D}$



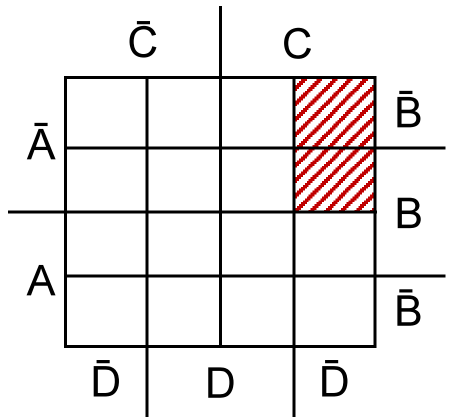
Região $A.\bar{C}.\bar{D}$



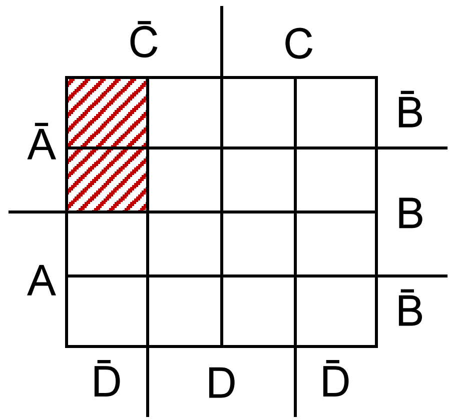
Região $\bar{A}.C.D$



Região $\bar{A}.\bar{C}.D$

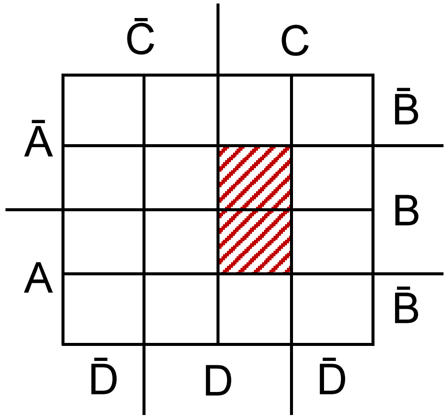


Região $\bar{A}.C.\bar{D}$

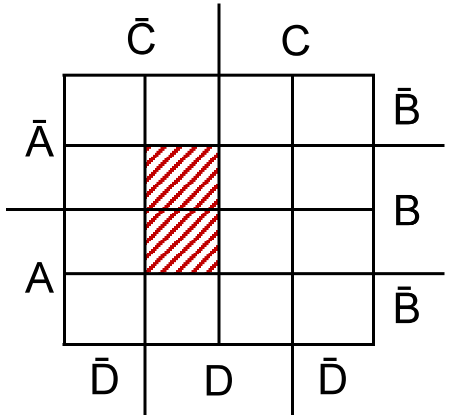


Região $\bar{A}.\bar{C}.\bar{D}$

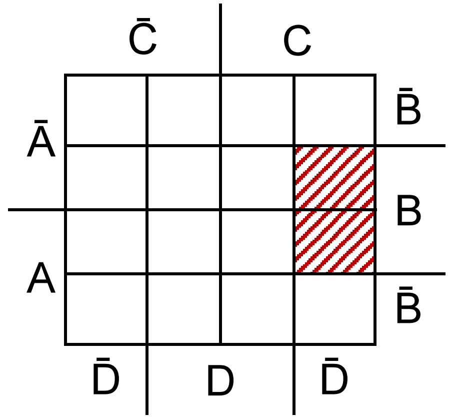
Pares (4/4)



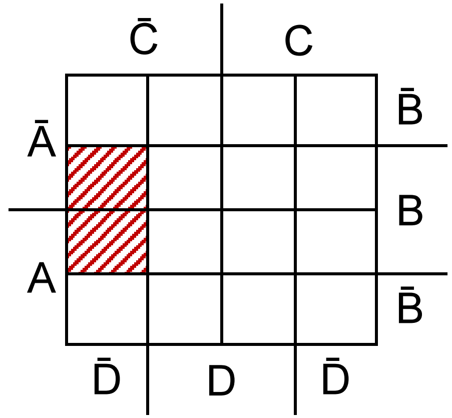
Região B.C.D



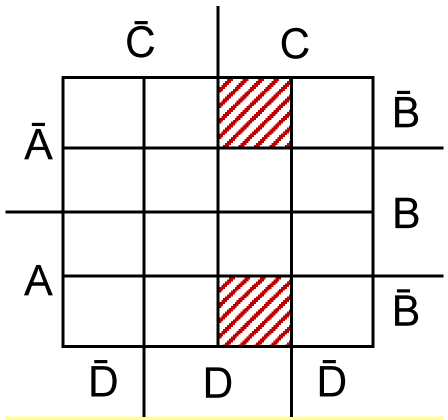
Região B.$\bar{C}$.D



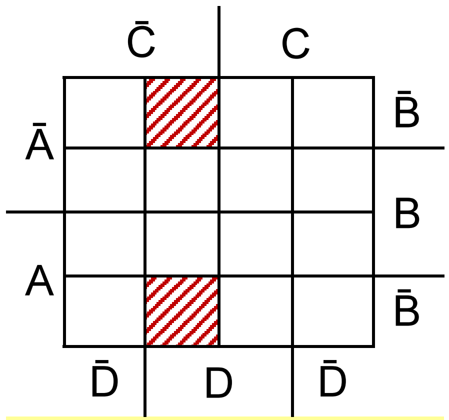
Região B.C.$\bar{D}$



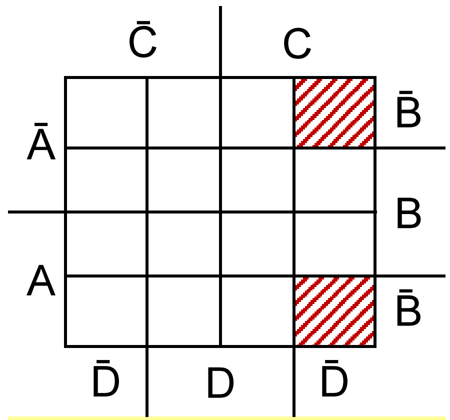
Região B.$\bar{C}$.$\bar{D}$



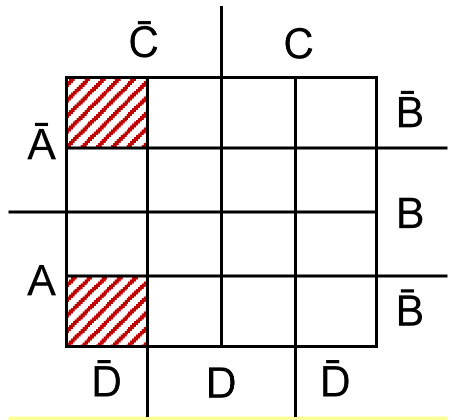
Região $\bar{B}$.C.D



Região $\bar{B}$.$\bar{C}$.D



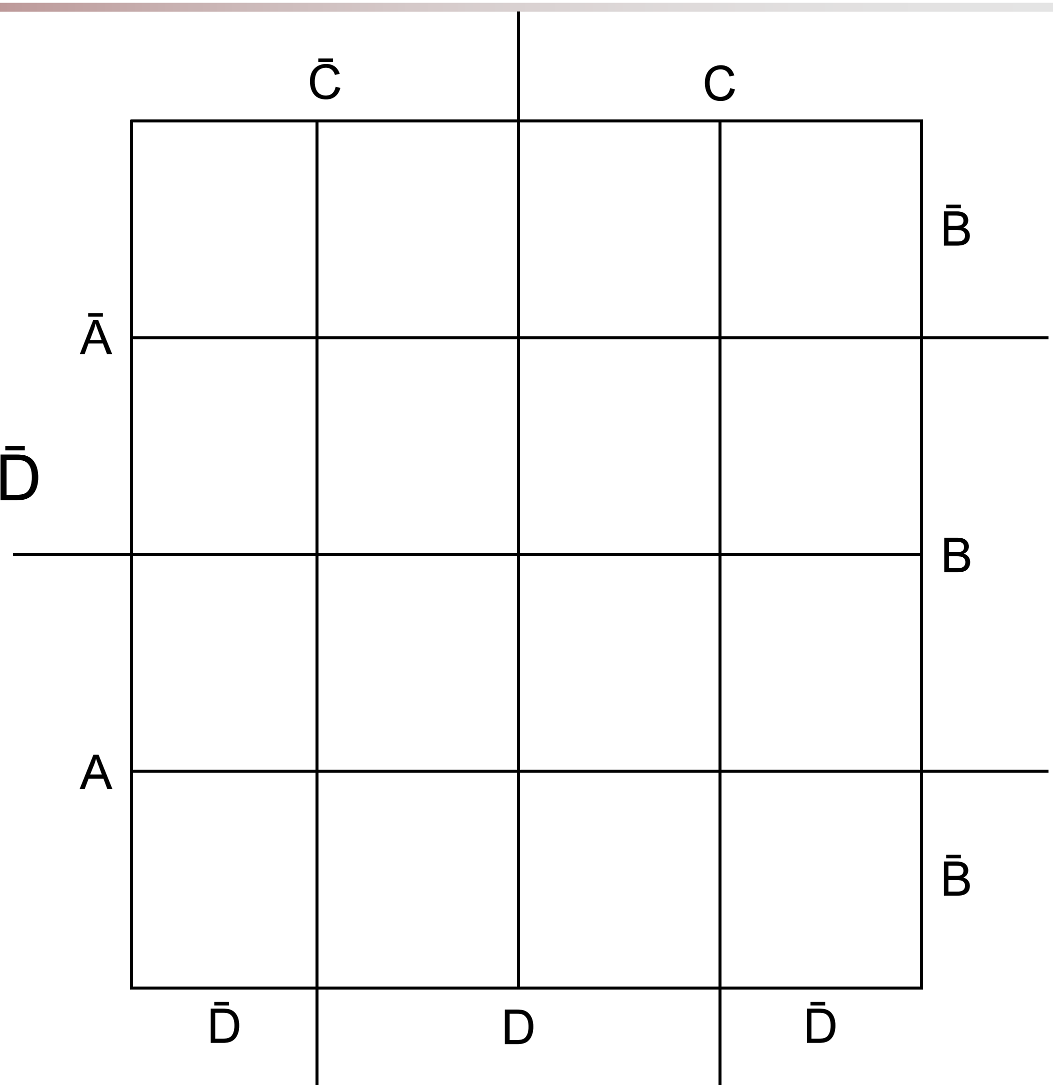
Região $\bar{B}$.C.$\bar{D}$



Região $\bar{B}$.$\bar{C}$.$\bar{D}$

Exemplo

- Simplifique a expressão usando mapa de Veitch-Karnaugh
  - $S = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.D + \bar{A}.\bar{B}.C.\bar{D}$ $\bar{A}.\bar{B}.C.D + \bar{A}.B.\bar{C}.D + \bar{A}.B.C.D + A.\bar{B}.\bar{C}.\bar{D} + A.\bar{B}.\bar{C}.D + A.\bar{B}.C.D + A.B.\bar{C}.\bar{D} + A.B.\bar{C}.D + A.B.C.D$



Exemplo

- Simplifique a expressão usando mapa de Veitch-Karnaugh
  - $S = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.D + \bar{A}.\bar{B}.C.\bar{D}$
    $\bar{A}.\bar{B}.C.D + \bar{A}.B.\bar{C}.D +$
    $\bar{A}.B.C.D + A.\bar{B}.\bar{C}.\bar{D} +$
    $A.\bar{B}.\bar{C}.D + A.\bar{B}.C.D +$
    $A.B.\bar{C}.\bar{D} + A.B.\bar{C}.D +$
    $A.B.C.D$
- Transpondo para o diagrama, temos o diagrama ao lado

		$\bar{C}$		C	
$\bar{A}$	0	1	1	1	$\bar{B}$
$\bar{A}$	0	1	1	0	B
A	1	1	1	0	B
A	1	1	1	0	$\bar{B}$
	$\bar{D}$	D	D	$\bar{D}$	

Exemplo

- Simplifique a expressão usando mapa de Veitch-Karnaugh
  - $S = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.D + \bar{A}.\bar{B}.C.\bar{D} + \bar{A}.\bar{B}.C.D + \bar{A}.B.\bar{C}.D + \bar{A}.B.C.D + A.\bar{B}.\bar{C}.\bar{D} + A.\bar{B}.\bar{C}.D + A.\bar{B}.C.D + A.B.\bar{C}.\bar{D} + A.B.\bar{C}.D + A.B.C.D$
- Transpondo para o diagrama, temos o diagrama ao lado
- Localizando oitavas

	$\bar{C}$	$\bar{C}$	C	C	
$\bar{A}$	0	1	1	1	$\bar{B}$
$\bar{A}$	0	1	1	0	B
A	1	1	1	0	B
A	1	1	1	0	$\bar{B}$
	$\bar{D}$	D	D	$\bar{D}$	

Exemplo

- Simplifique a expressão usando mapa de Veitch-Karnaugh
  - $S = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.D + \bar{A}.\bar{B}.C.\bar{D} + \bar{A}.\bar{B}.C.D + \bar{A}.B.\bar{C}.D + \bar{A}.B.C.D + A.\bar{B}.\bar{C}.\bar{D} + A.\bar{B}.\bar{C}.D + A.\bar{B}.C.D + A.B.\bar{C}.\bar{D} + A.B.\bar{C}.D + A.B.C.D$
- Transpondo para o diagrama, temos o diagrama ao lado
- Localizando oitavas, quadras

	$\bar{C}$		C		
$\bar{A}$	0	1	1	1	$\bar{B}$
$\bar{A}$	0	1	1	0	B
A	1	1	1	0	B
A	1	1	1	0	$\bar{B}$
	$\bar{D}$	D	D	$\bar{D}$	

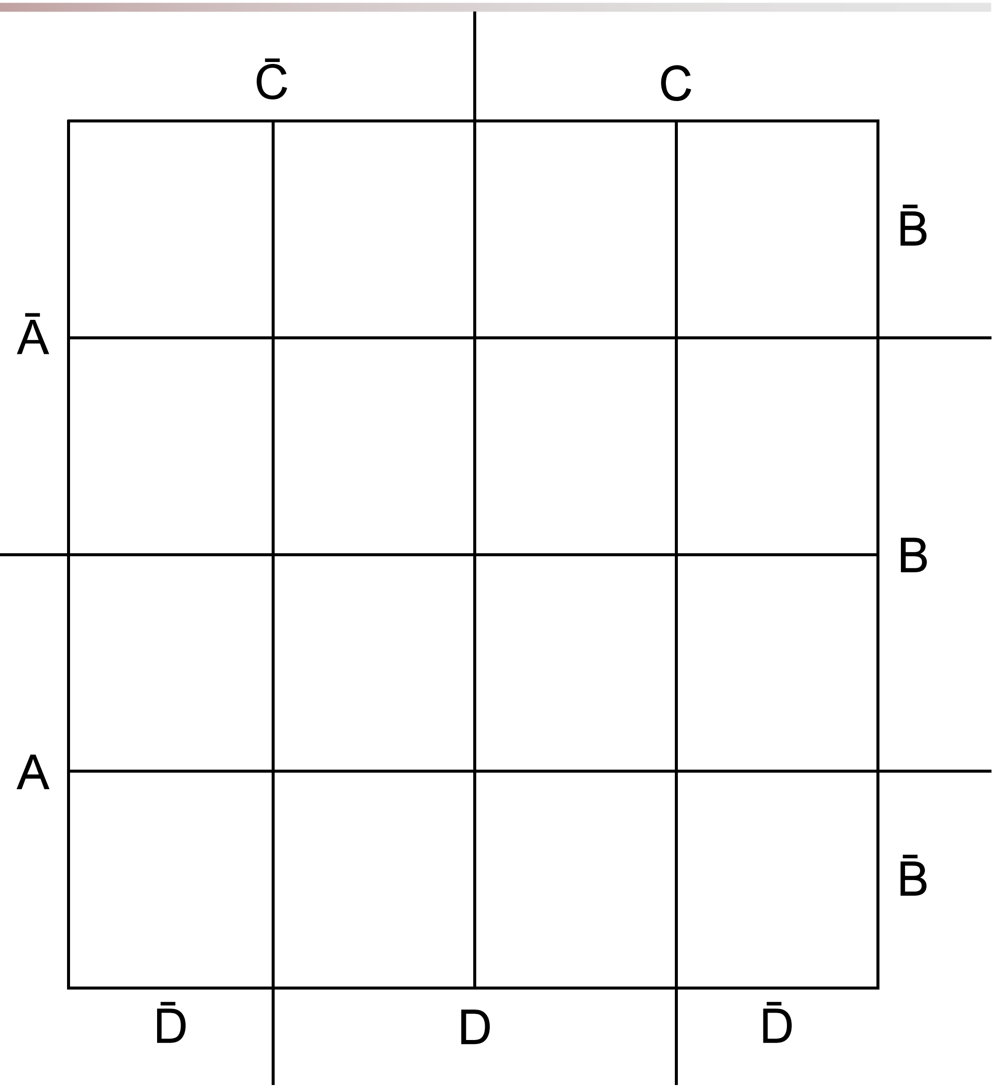
Exemplo

- Simplifique a expressão usando mapa de Veitch-Karnaugh
  - $S = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.D + \bar{A}.\bar{B}.C.\bar{D}$ $\bar{A}.\bar{B}.C.D + \bar{A}.B.\bar{C}.D + \bar{A}.B.C.D +$ $A.\bar{B}.\bar{C}.\bar{D} + A.\bar{B}.\bar{C}.D + A.\bar{B}.C.D +$ $A.B.\bar{C}.\bar{D} + A.B.\bar{C}.D + A.B.C.D$
- Transpondo para o diagrama, temos o diagrama ao lado
- Localizando oitavas, quadras e pares
- Observe que não existem elementos isolados neste exemplo
- A expressão simplificada é
  - $S = D + A.\bar{C} + \bar{A}.\bar{B}.C$

		$\bar{C}$	$\bar{C}$	C	C	
$\bar{A}$		0	1	1	1	$\bar{B}$
$\bar{A}$		0	1	1	0	B
A		1	1	1	0	B
A		1	1	1	0	$\bar{B}$
		$\bar{D}$	D	D	$\bar{D}$	

Exercício

- Simplifique a expressão usando mapa de Veitch-Karnaugh
  - $S = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.D + \bar{A}.\bar{B}.C.D$
    $+ \bar{A}.B.\bar{C}.\bar{D} + \bar{A}.B.\bar{C}.D +$
    $+ \bar{A}.B.C.D + \bar{A}.B.C.\bar{D} +$
    $+ A.B.C.D + A.\bar{B}.C.\bar{D}$



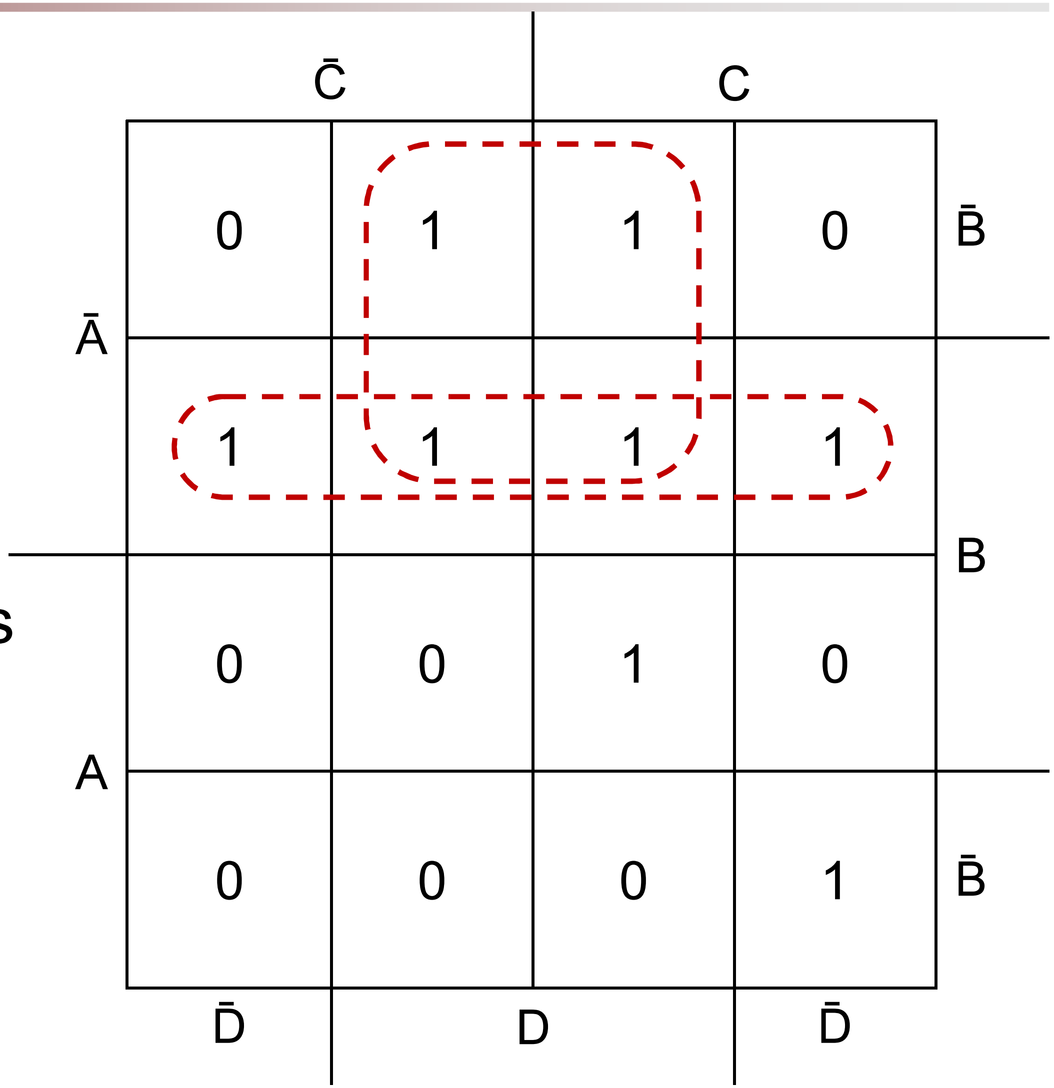
Exercício

- Simplifique a expressão usando mapa de Veitch-Karnaugh
  - $S = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.D + \bar{A}.\bar{B}.C.D + \bar{A}.B.\bar{C}.\bar{D} + \bar{A}.B.\bar{C}.D + \bar{A}.B.C.D + \bar{A}.B.C.\bar{D} + A.B.C.D + A.\bar{B}.C.\bar{D}$

	$\bar{C}$		C		
$\bar{A}$		$\bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.D$	$\bar{A}.\bar{B}.C.D$		$\bar{B}$
	$\bar{A}.B.\bar{C}.\bar{D}$	$\bar{A}.B.\bar{C}.D$	$\bar{A}.B.C.D$	$\bar{A}.B.C.\bar{D}$	B
A			$A.B.C.D$		
				$A.\bar{B}.C.\bar{D}$	$\bar{B}$
	$\bar{D}$	D		$\bar{D}$	

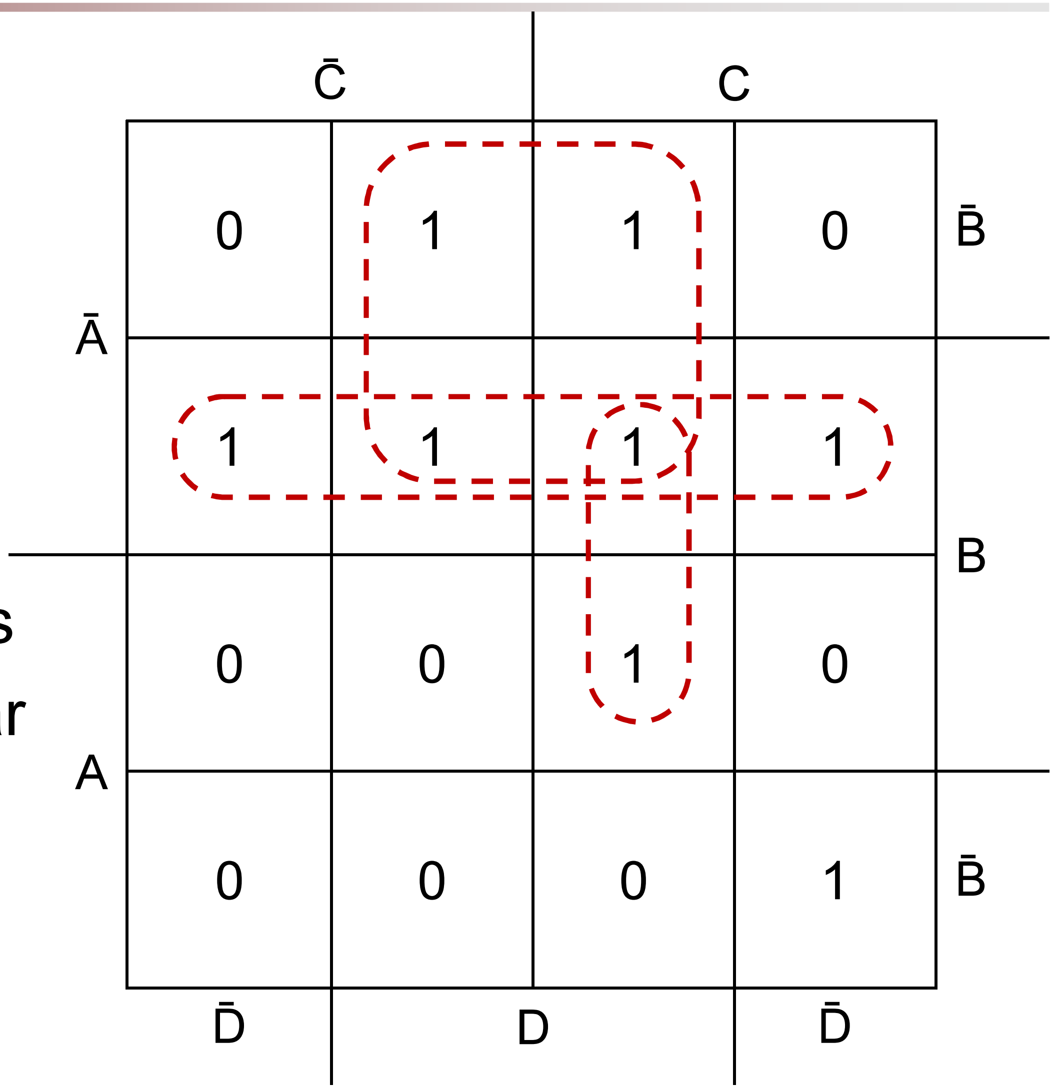
Solução

- Simplifique a expressão usando mapa de Veitch-Karnaugh
  - $S = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.D + \bar{A}.\bar{B}.C.D +$ $\bar{A}.B.\bar{C}.\bar{D}\ + \bar{A}.B.\bar{C}.D + +$ $\bar{A}.B.C.D + \bar{A}.B.C.\bar{D} + +$ $A.B.C.D + A.\bar{B}.C.\bar{D}$
- Não há oitavas possíveis
- Há duas quadras



Solução

- Simplifique a expressão usando mapa de Veitch-Karnaugh
  - $S = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.D + \bar{A}.\bar{B}.C.D + \bar{A}.B.\bar{C}.\bar{D} + \bar{A}.B.\bar{C}.D + + \bar{A}.B.C.D + \bar{A}.B.C.\bar{D} + + A.B.C.D + A.\bar{B}.C.\bar{D}$
- Não há oitavas possíveis
- Há duas quadras, um par



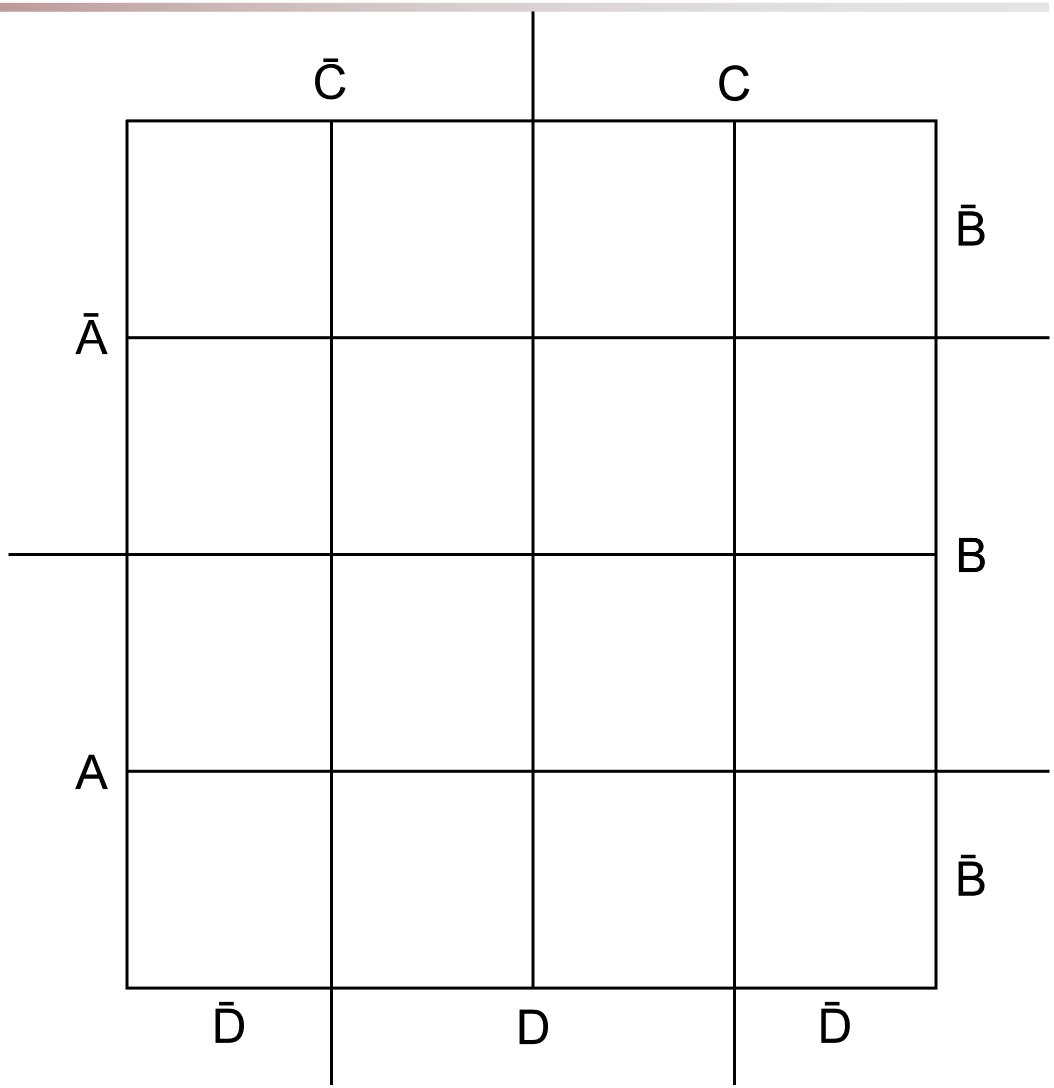
Solução

- Simplifique a expressão usando mapa de Veitch-Karnaugh
  - $S = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.D + \bar{A}.\bar{B}.C.D + \bar{A}.B.\bar{C}.\bar{D} + \bar{A}.B.\bar{C}.D + + \bar{A}.B.C.D + \bar{A}.B.C.\bar{D} + + A.B.C.D + A.\bar{B}.C.\bar{D}$
- Não há oitavas possíveis
- Há duas quadras, um par e um elemento isolado
- Portanto, a expressão minimizada é
  - $S = \bar{A}.D + \bar{A}.B + B.C.D + A.\bar{B}.C.\bar{D}$

	$\bar{C}$	$\bar{C}$	C	C	
$\bar{A}$	0	1	1	0	$\bar{B}$
$\bar{A}$	1	1	1	1	B
A	0	0	1	0	B
A	0	0	0	1	$\bar{B}$
	$\bar{D}$	D	D	$\bar{D}$	

Exercício

- Simplifique a expressão usando mapa de Veitch-Karnaugh
  - $S = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.\bar{D} + \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.D + \bar{A}.\bar{B}.C.\bar{D} + \bar{A}.B.\bar{C}.D + A.\bar{B}.\bar{C}.\bar{D} + A.\bar{B}.\bar{C}.D + A.\bar{B}.C.\bar{D} + A.B.\bar{C}.D + A.B.C.D$



Exercício

- Simplifique a expressão usando mapa de Veitch-Karnaugh
  - $S = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.\bar{D} + \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.D + \bar{A}.\bar{B}.C.\bar{D} + \bar{A}.B.\bar{C}.D + A.\bar{B}.\bar{C}.\bar{D} + A.\bar{B}.\bar{C}.D + A.\bar{B}.C.\bar{D} + A.B.\bar{C}.D + A.B.C.D$

	$\bar{C}$		C		
$\bar{A}$	$\bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.\bar{D}$	$\bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.D$		$\bar{A}.\bar{B}.C.\bar{D}$	$\bar{B}$
		$\bar{A}.B.\bar{C}.D$			B
A		$A.B.\bar{C}.D$	$A.B.C.D$		
	$A.\bar{B}.\bar{C}.\bar{D}$	$A.\bar{B}.\bar{C}.D$		$A.\bar{B}.C.\bar{D}$	$\bar{B}$
	$\bar{D}$	D		$\bar{D}$	

Exercício

- Simplifique a expressão usando mapa de Veitch-Karnaugh
  - $S = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.\bar{D} + \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.D + \bar{A}.\bar{B}.C.\bar{D} + \bar{A}.B.\bar{C}.D + A.\bar{B}.\bar{C}.\bar{D} + A.\bar{B}.\bar{C}.D + A.\bar{B}.C.\bar{D} + A.B.\bar{C}.D + A.B.C.D$

	$\bar{C}$	$\bar{C}$	C	C	
$\bar{A}$	1	1		1	$\bar{B}$
$\bar{A}$		1			B
A		1	1		B
A	1	1		1	$\bar{B}$
	$\bar{D}$	D	D	$\bar{D}$	

Solução

- Simplifique a expressão usando mapa de Veitch-Karnaugh
  - $S = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.\bar{D} + \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.D + \bar{A}.\bar{B}.C.\bar{D} + \bar{A}.B.\bar{C}.D + A.\bar{B}.\bar{C}.\bar{D} + A.\bar{B}.\bar{C}.D + A.\bar{B}.C.\bar{D} + A.B.\bar{C}.D + A.B.C.D$
- Não há oitavas possíveis
- Há duas quadras e um par
- Portanto, a expressão minimizada é
  - $S = \bar{C}.D + \bar{B}.\bar{D} + A.B.D$

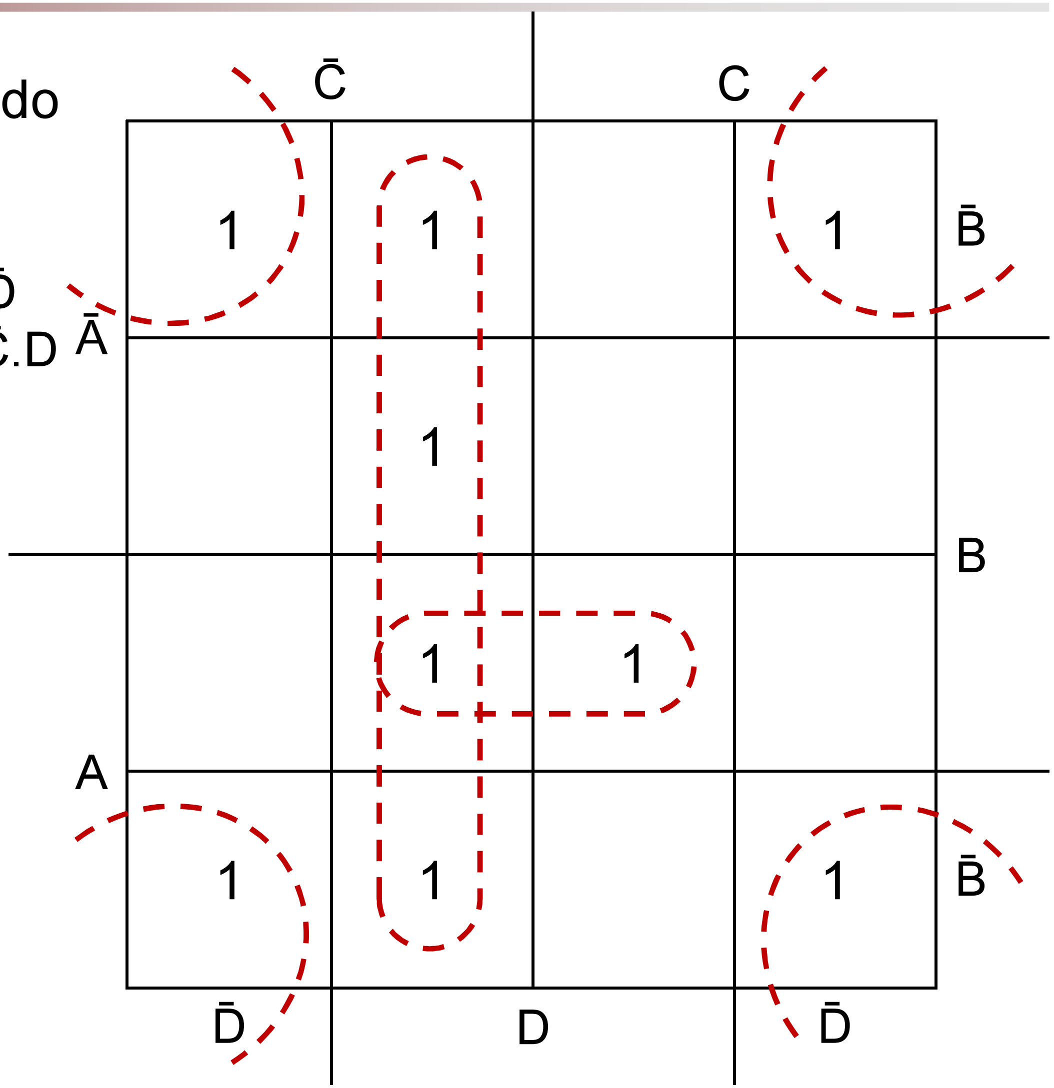


Diagrama de Veitch-Karnaugh para 5 Variáveis

- Nesse caso, para obter a expressão simplificada por meio do diagrama
  - Agrupar as regiões onde S=1 no menor número possível de **hexas**
  - Em seguida, agrupar as regiões onde S=1 no menor número possível de **oitavas**
  - Em seguida, agrupar as regiões onde S=1 no menor número possível de **quadras**
  - Em seguida, agrupar as regiões onde S=1 no menor número possível de **pares**
  - As regiões onde S=1 que não puderem ser agrupadas em oitavas, quadras ou pares são consideradas isoladamente
- No diagrama, os lados **extremos opostos se comunicam**, assim como um diagrama se sobrepõe ao outro

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 5 Variáveis

Situação	A	B	C	D	E	S
0	0	0	0	0	0	
1	0	0	0	0	1	
2	0	0	0	1	0	
3	0	0	0	1	1	
4	0	0	1	0	0	
5	0	0	1	0	1	
6	0	0	1	1	0	
7	0	0	1	1	1	
8	0	1	0	0	0	
9	0	1	0	0	1	
10	0	1	0	1	0	
11	0	1	0	1	1	
12	0	1	1	0	0	
13	0	1	1	0	1	
14	0	1	1	1	0	
15	0	1	1	1	1	

Situação	A	B	C	D	E	S
16	1	0	0	0	0	
17	1	0	0	0	1	
18	1	0	0	1	0	
19	1	0	0	1	1	
20	1	0	1	0	0	
21	1	0	1	0	1	
22	1	0	1	1	0	
23	1	0	1	1	1	
24	1	1	0	0	0	
25	1	1	0	0	1	
26	1	1	0	1	0	
27	1	1	0	1	1	
28	1	1	1	0	0	
29	1	1	1	0	1	
30	1	1	1	1	0	
31	1	1	1	1	1	

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 5 Variáveis

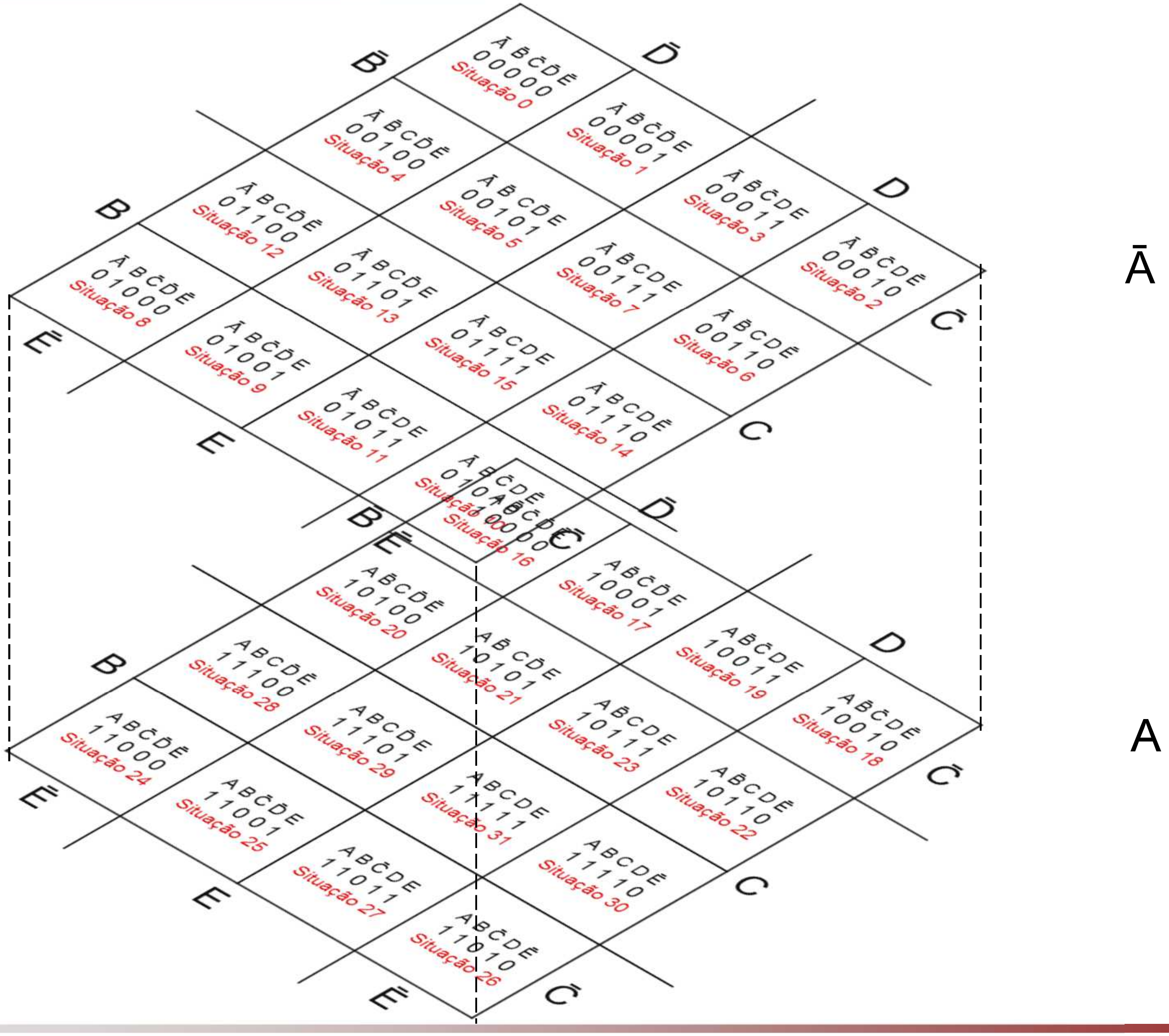
$\bar{A}$

	$\bar{D}$	$\bar{D}$	D	D	
$\bar{B}$	$\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D}\,\bar{E}$ 0 0 0 0 0 Situação 0	$\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D}\,E$ 0 0 0 0 1 Situação 1	$\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\,D\,E$ 0 0 0 1 1 Situação 3	$\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\,D\,\bar{E}$ 0 0 0 1 0 Situação 2	$\bar{C}$
$\bar{B}$	$\bar{A}\,\bar{B}\,C\,\bar{D}\,\bar{E}$ 0 0 1 0 0 Situação 4	$\bar{A}\,\bar{B}\,C\,\bar{D}\,E$ 0 0 1 0 1 Situação 5	$\bar{A}\,\bar{B}\,C\,D\,E$ 0 0 1 1 1 Situação 7	$\bar{A}\,\bar{B}\,C\,D\,\bar{E}$ 0 0 1 1 0 Situação 6	C
B	$\bar{A}\,B\,C\,\bar{D}\,\bar{E}$ 0 1 1 0 0 Situação 12	$\bar{A}\,B\,C\,\bar{D}\,E$ 0 1 1 0 1 Situação 13	$\bar{A}\,B\,C\,D\,E$ 0 1 1 1 1 Situação 15	$\bar{A}\,B\,C\,D\,\bar{E}$ 0 1 1 1 0 Situação 14	C
B	$\bar{A}\,B\,\bar{C}\,\bar{D}\,\bar{E}$ 0 1 0 0 0 Situação 8	$\bar{A}\,B\,\bar{C}\,\bar{D}\,E$ 0 1 0 0 1 Situação 9	$\bar{A}\,B\,\bar{C}\,D\,E$ 0 1 0 1 1 Situação 11	$\bar{A}\,B\,\bar{C}\,D\,\bar{E}$ 0 1 0 1 0 Situação 10	$\bar{C}$
	$\bar{E}$	E	E	$\bar{E}$	

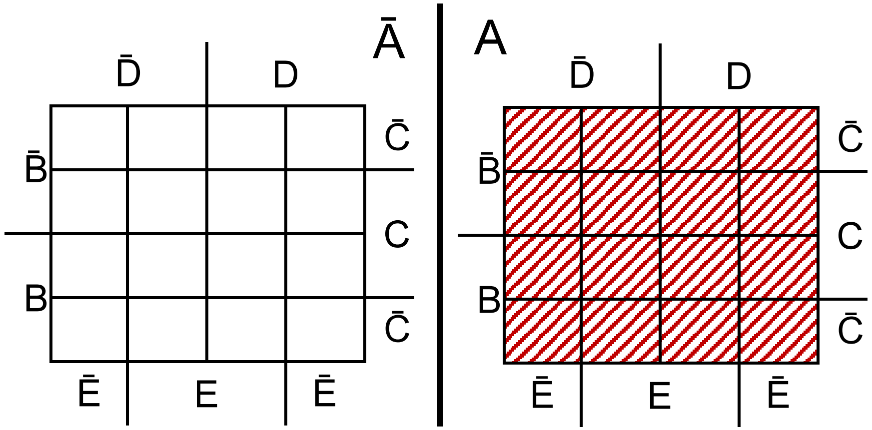
A

	$\bar{D}$	$\bar{D}$	D	D	
$\bar{B}$	$A\,\bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D}\,\bar{E}$ 1 0 0 0 0 Situação 16	$A\,\bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D}\,E$ 1 0 0 0 1 Situação 17	$A\,\bar{B}\,\bar{C}\,D\,E$ 1 0 0 1 1 Situação 19	$A\,\bar{B}\,\bar{C}\,D\,\bar{E}$ 1 0 0 1 0 Situação 18	$\bar{C}$
$\bar{B}$	$A\,\bar{B}\,C\,\bar{D}\,\bar{E}$ 1 0 1 0 0 Situação 20	$A\,\bar{B}\,C\,\bar{D}\,E$ 1 0 1 0 1 Situação 21	$A\,\bar{B}\,C\,D\,E$ 1 0 1 1 1 Situação 23	$A\,\bar{B}\,C\,D\,\bar{E}$ 1 0 1 1 0 Situação 22	C
B	$A\,B\,C\,\bar{D}\,\bar{E}$ 1 1 1 0 0 Situação 28	$A\,B\,C\,\bar{D}\,E$ 1 1 1 0 1 Situação 29	$A\,B\,C\,D\,E$ 1 1 1 1 1 Situação 31	$A\,B\,C\,D\,\bar{E}$ 1 1 1 1 0 Situação 30	C
B	$A\,B\,\bar{C}\,\bar{D}\,\bar{E}$ 1 1 0 0 0 Situação 24	$A\,B\,\bar{C}\,\bar{D}\,E$ 1 1 0 0 1 Situação 25	$A\,B\,\bar{C}\,D\,E$ 1 1 0 1 1 Situação 27	$A\,B\,\bar{C}\,D\,\bar{E}$ 1 1 0 1 0 Situação 26	$\bar{C}$
	$\bar{E}$	E	E	$\bar{E}$	

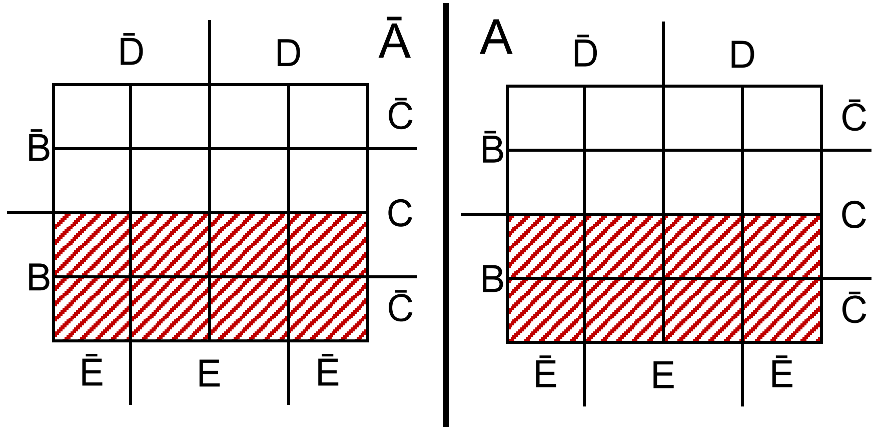
Diagrama de Veitch-Karnaugh para 5 Variáveis



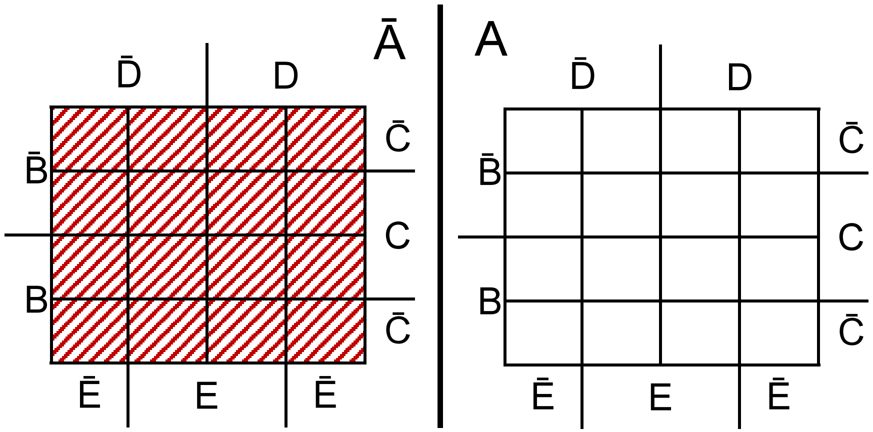
Hexas (1)



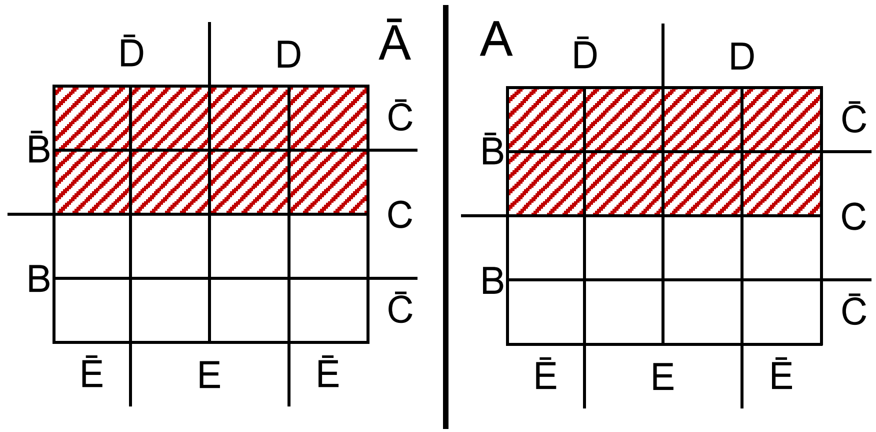
Região A



Região B

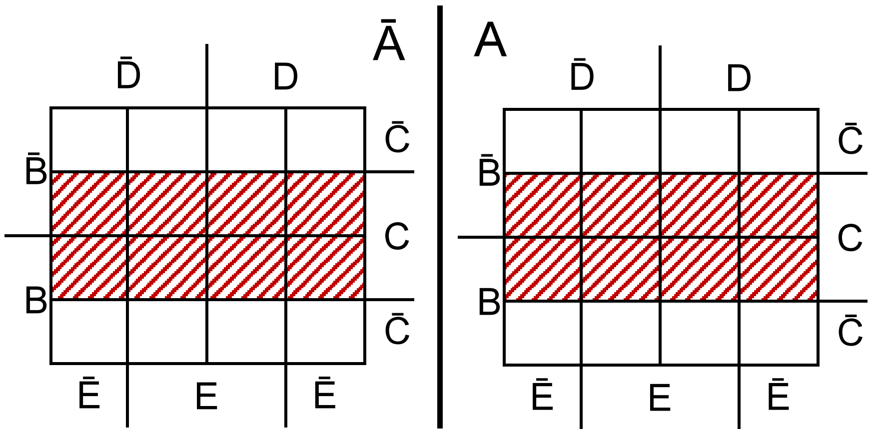


Região Ā

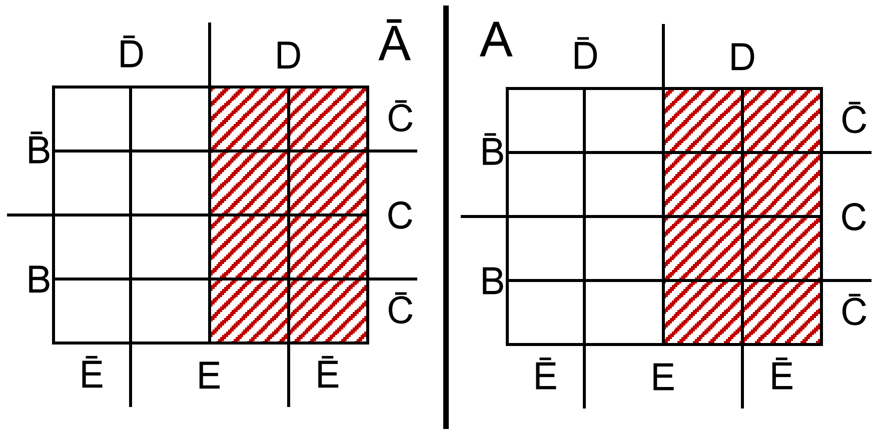


Região B̄

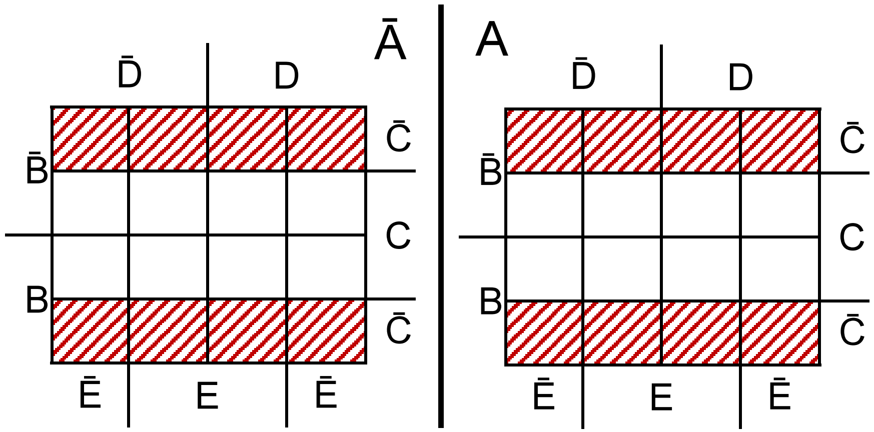
Hexas (2)



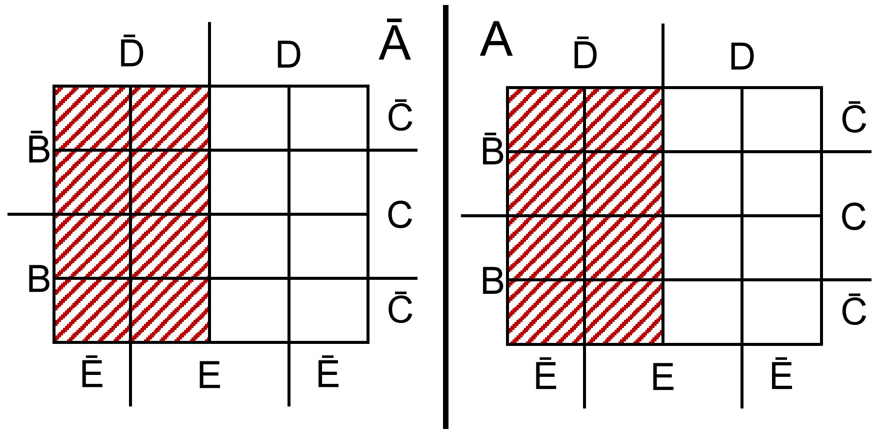
Região C



Região D

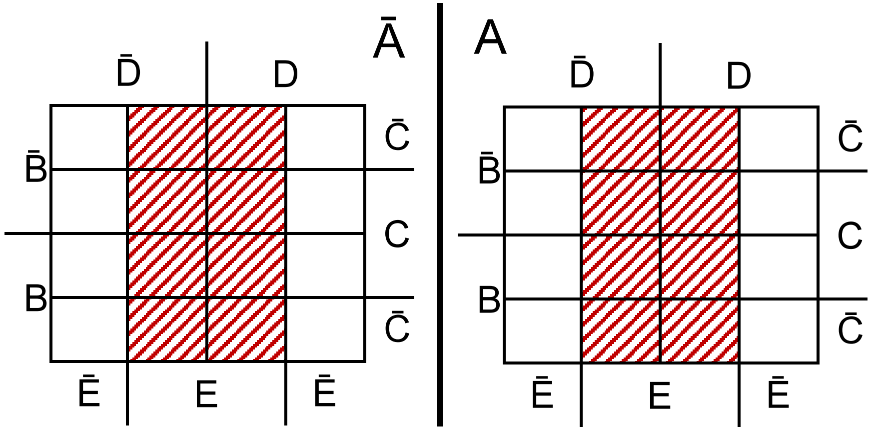


Região C̄

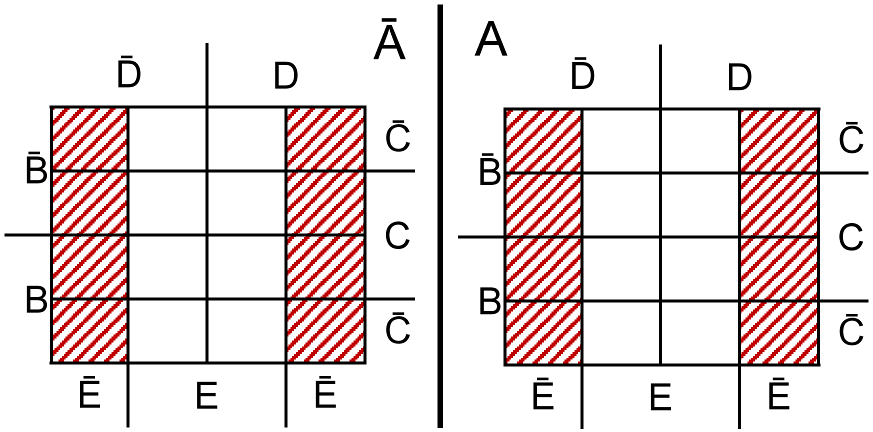


Região D̄

Hexas (3)

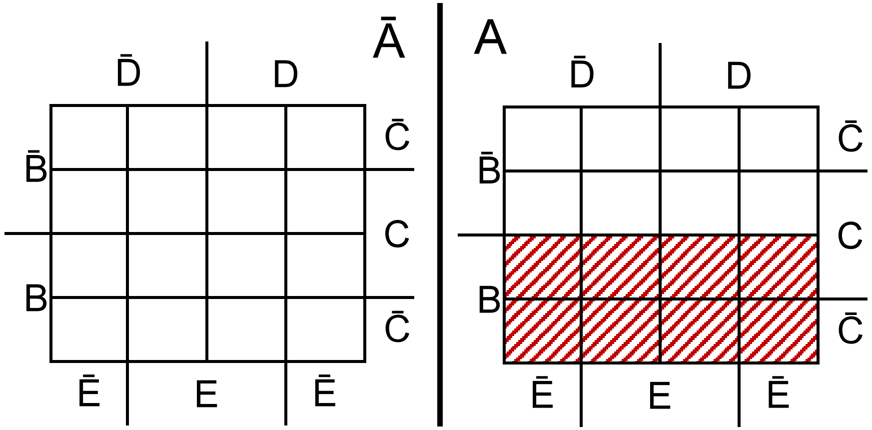


Região E

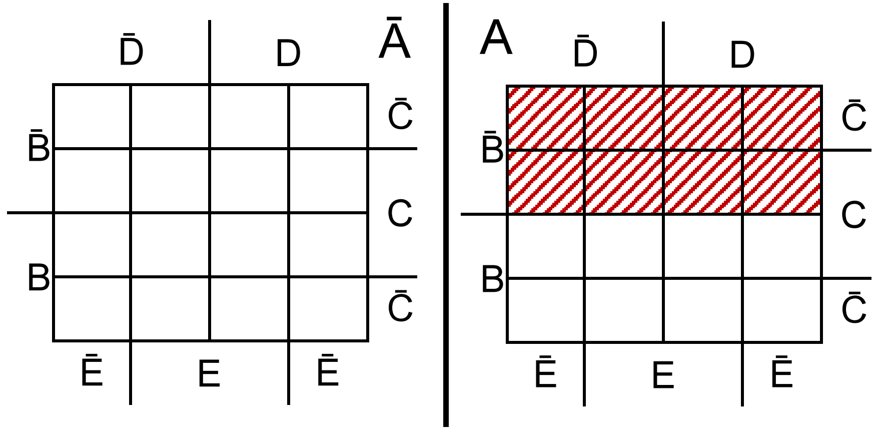


Região Ē

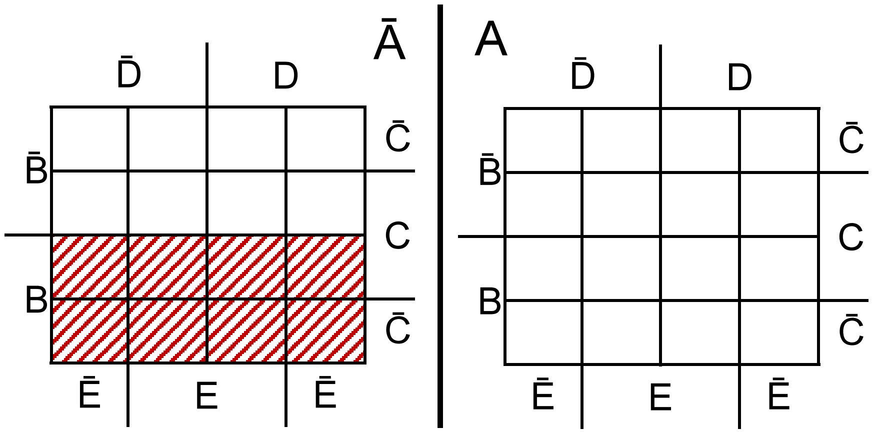
Oitavas (1/10)



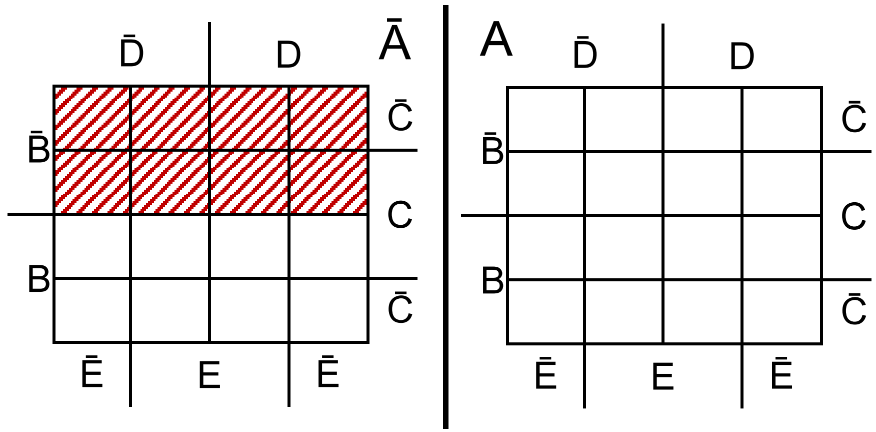
Região A.B



Região A.B̄

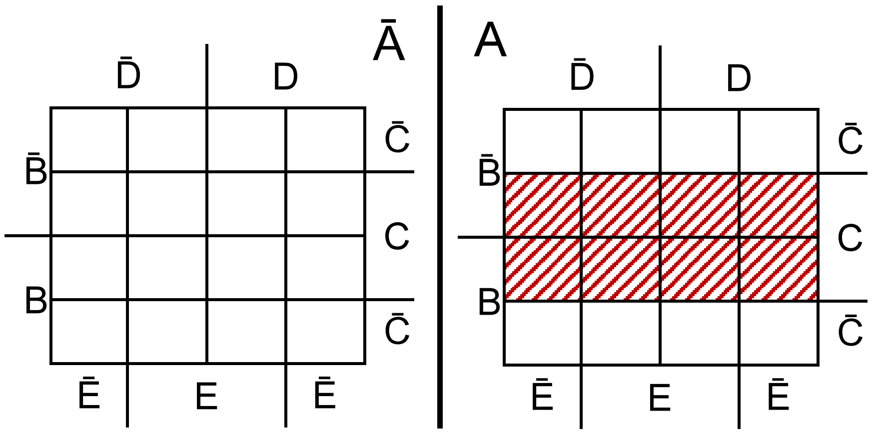


Região Ā.B

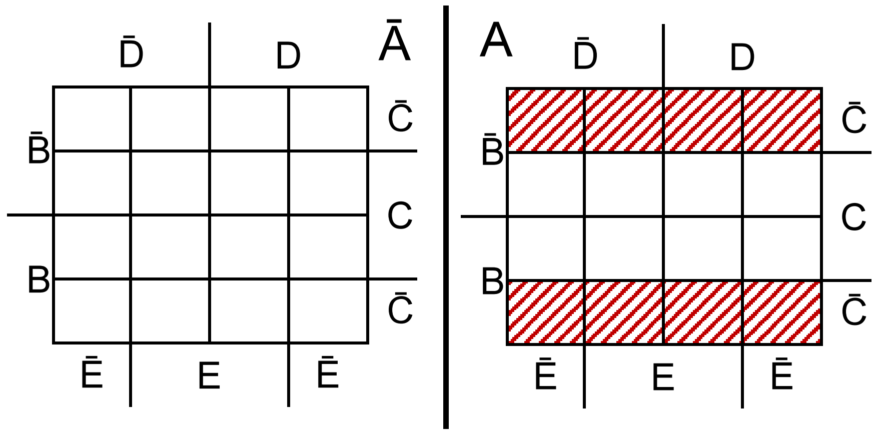


Região Ā.B̄

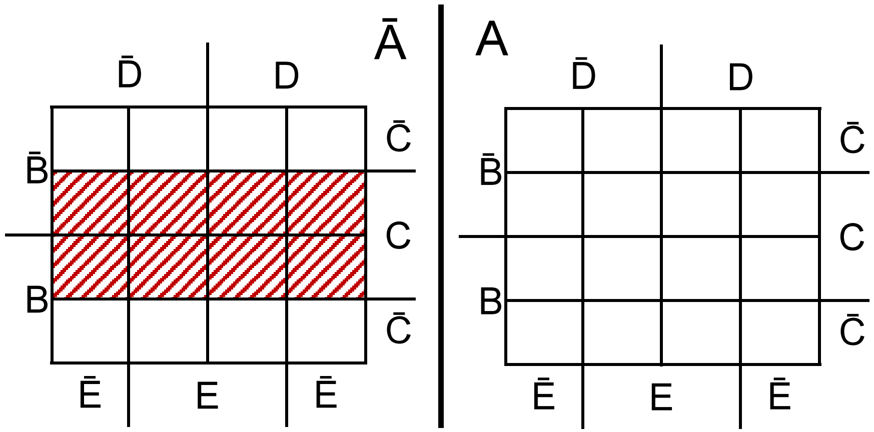
Oitavas (2/10)



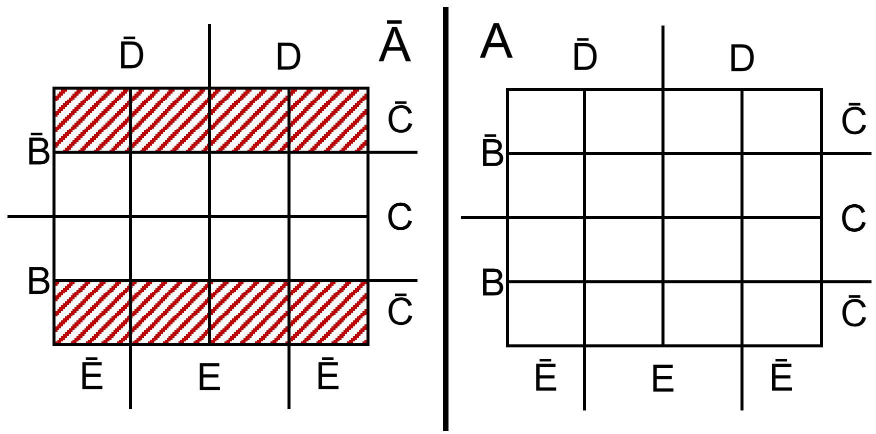
Região A.C



Região A.C̄

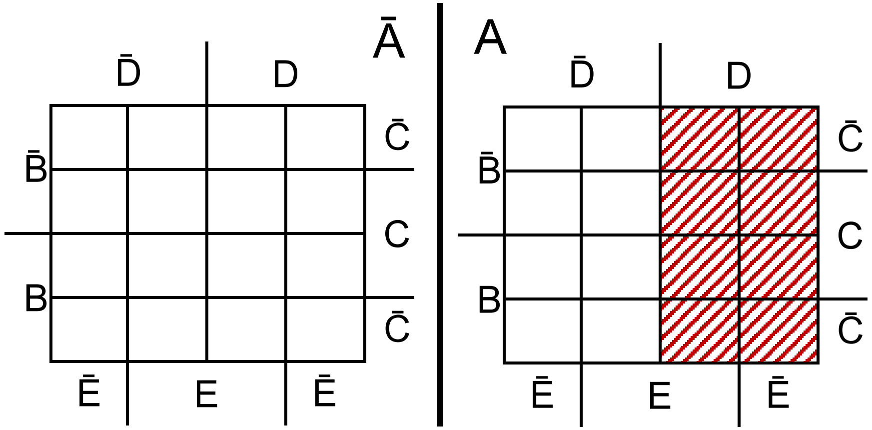


Região Ā.C

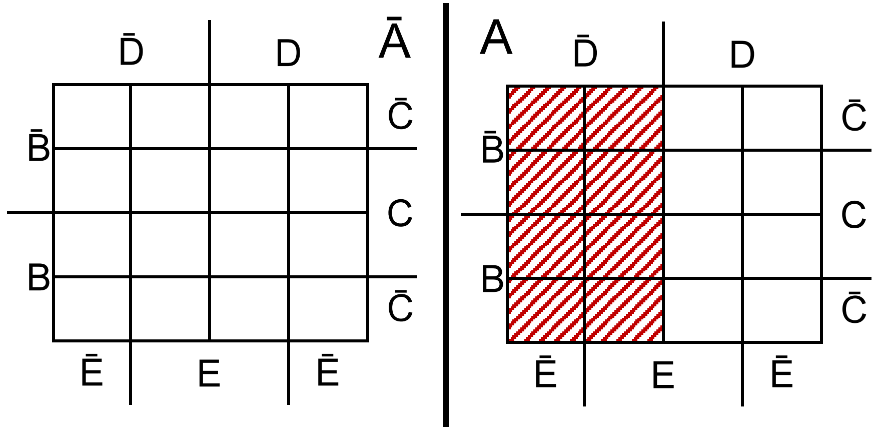


Região Ā.C̄

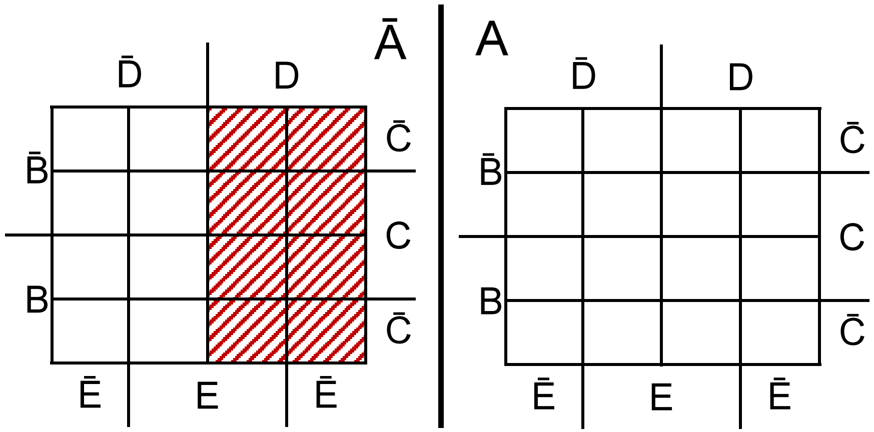
Oitavas (3/10)



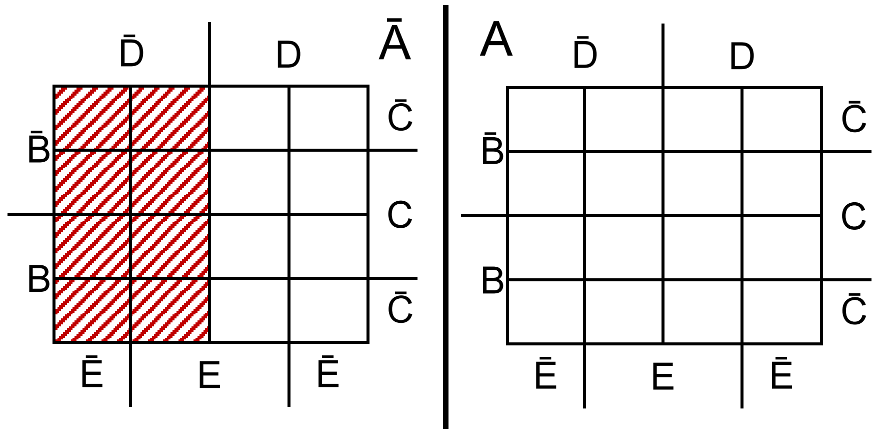
Região A.D



Região A.D̄

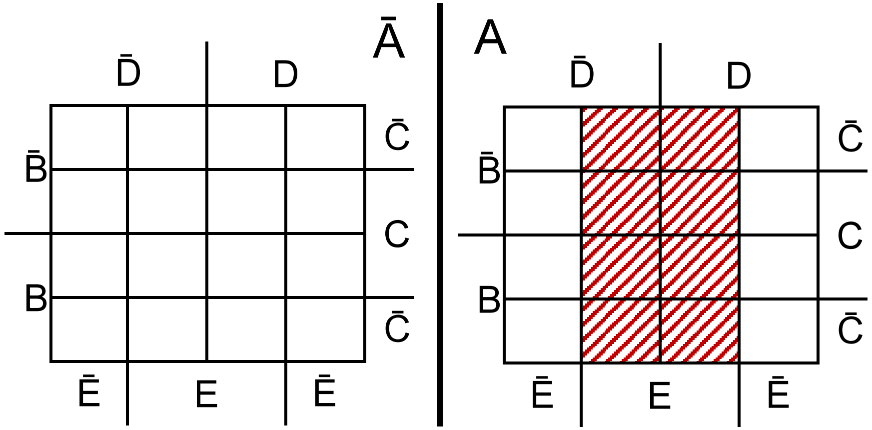


Região Ā.D

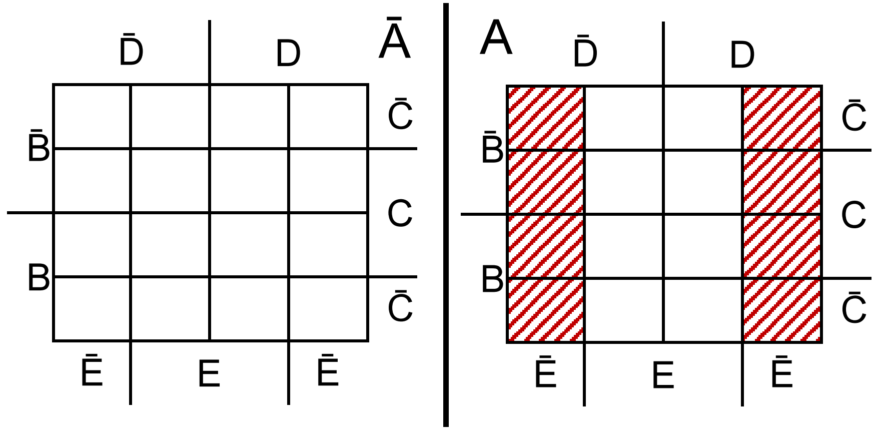


Região Ā.D̄

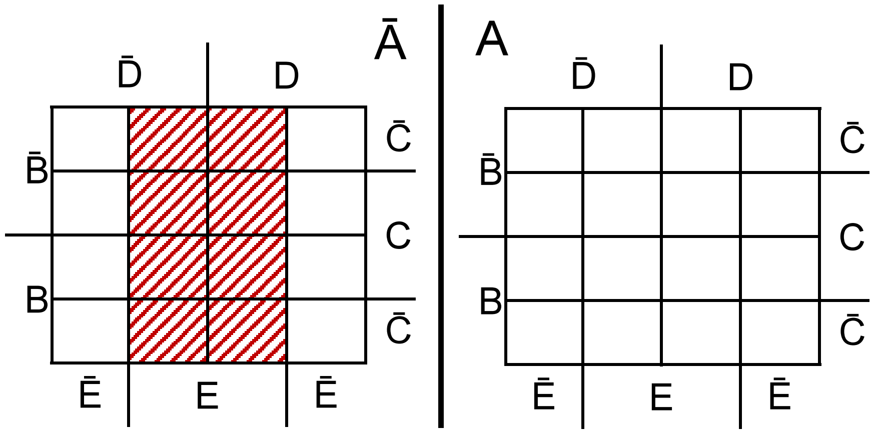
Oitavas (4/10)



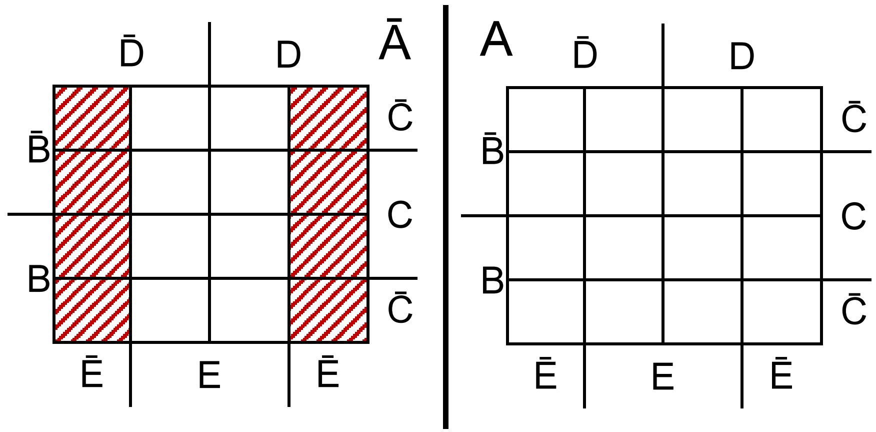
Região A.E



Região A.Ē

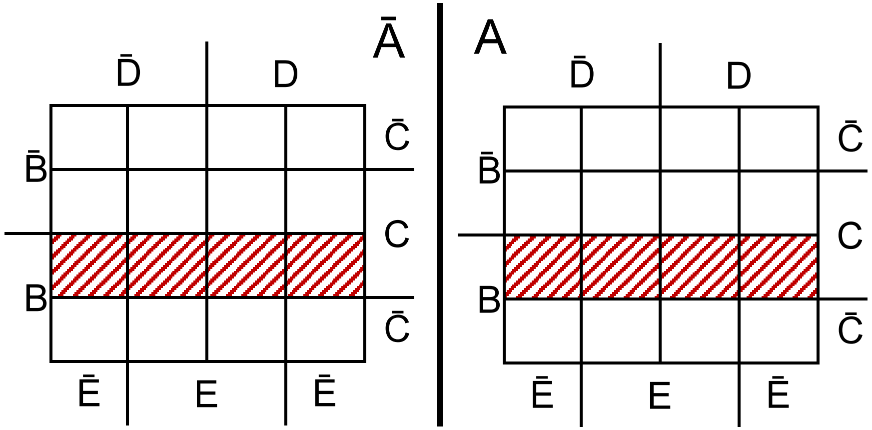


Região Ā.E

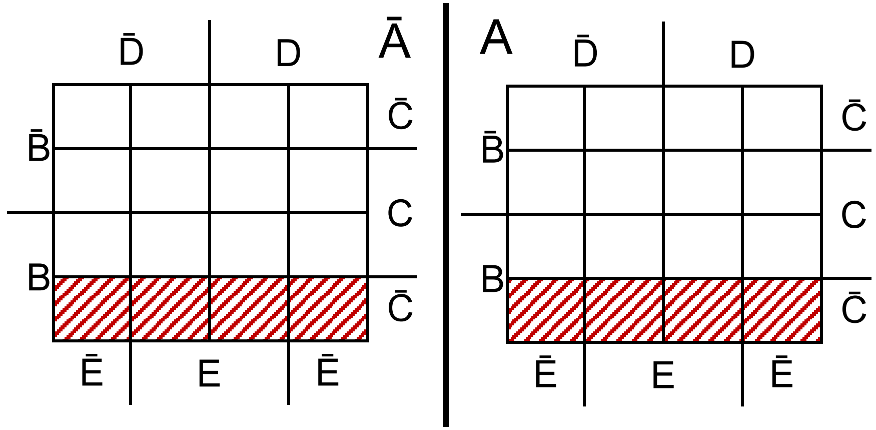


Região Ā.Ē

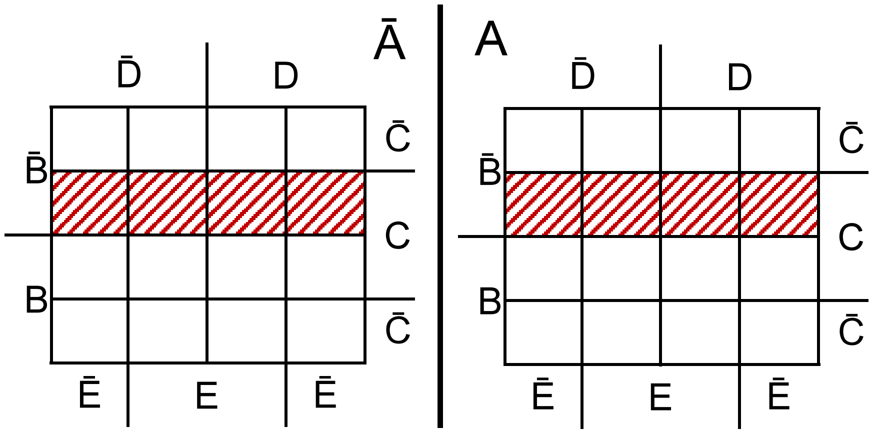
Oitavas (5/10)



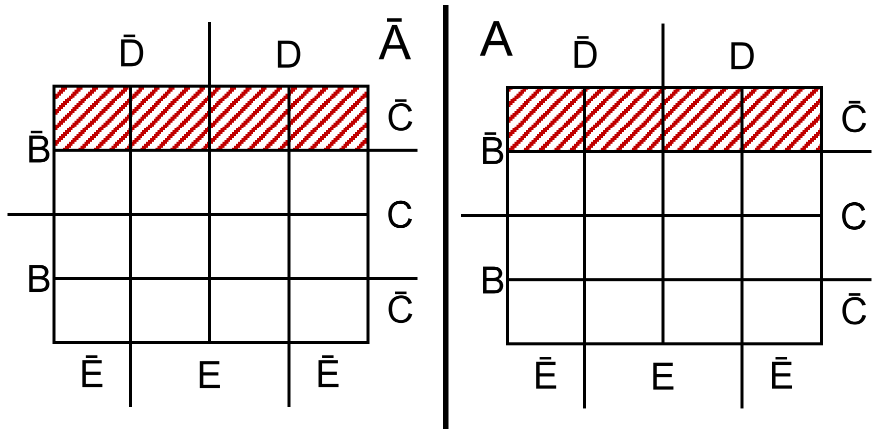
Região $B.C$



Região $B.\bar{C}$

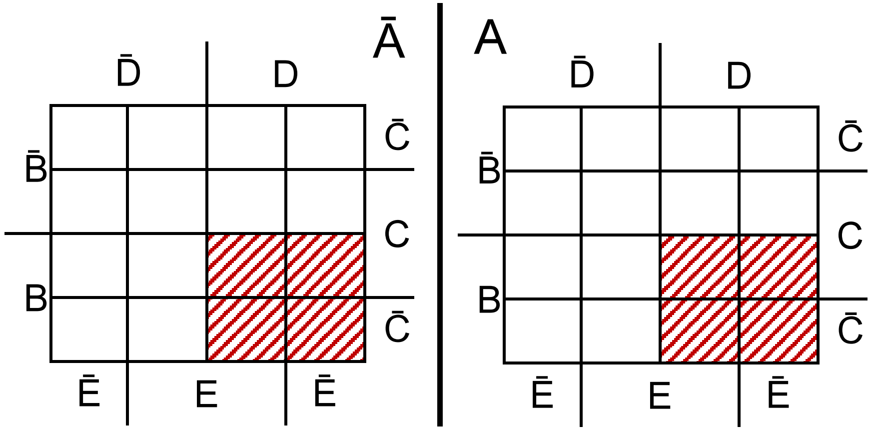


Região $\bar{B}.C$

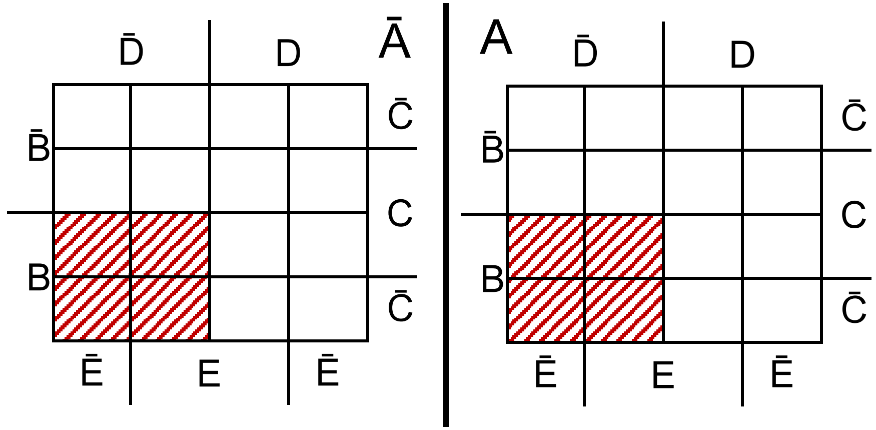


Região $\bar{B}.\bar{C}$

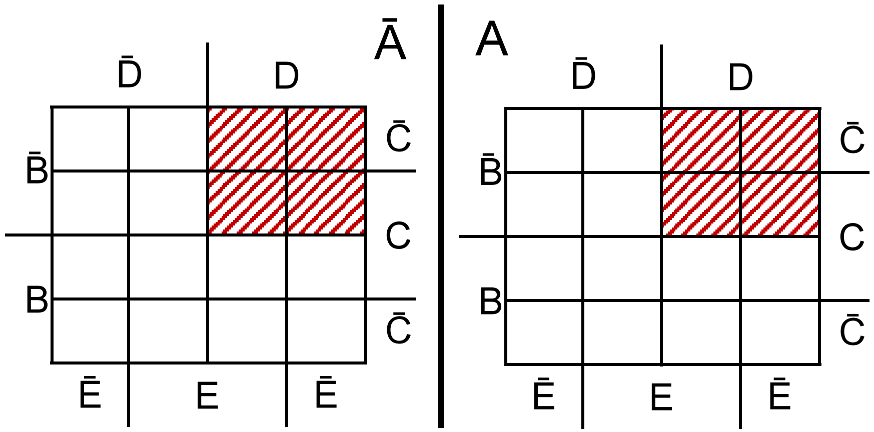
Oitavas (6/10)



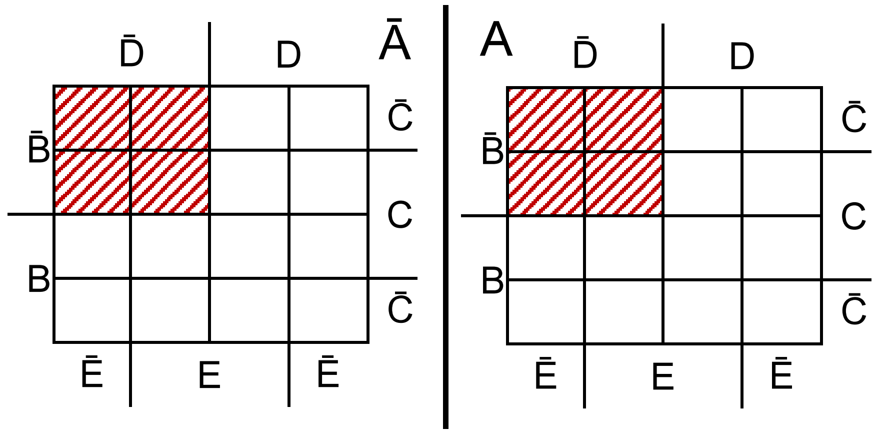
Região B.D



Região B.D̄

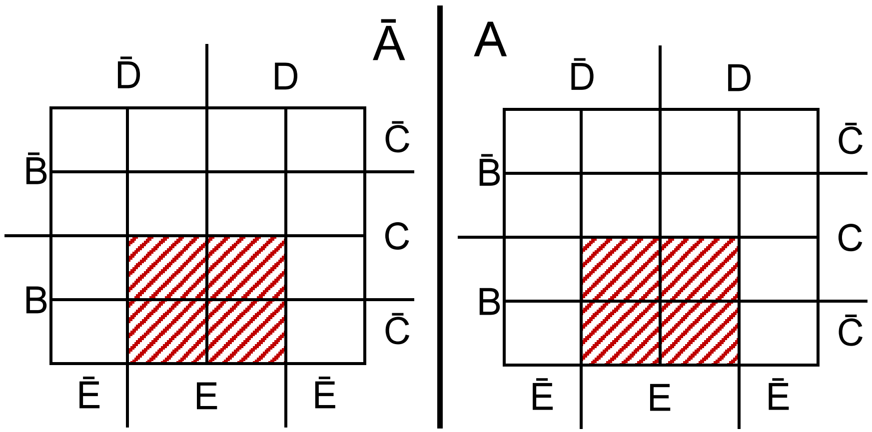


Região B̄.D

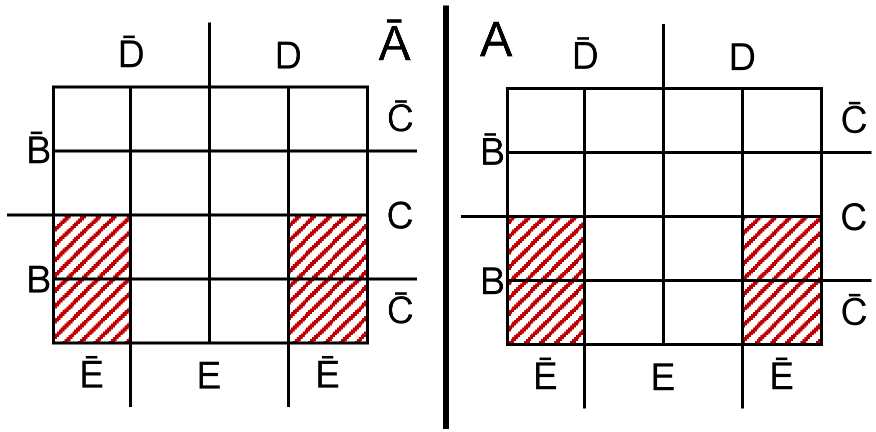


Região B̄.D̄

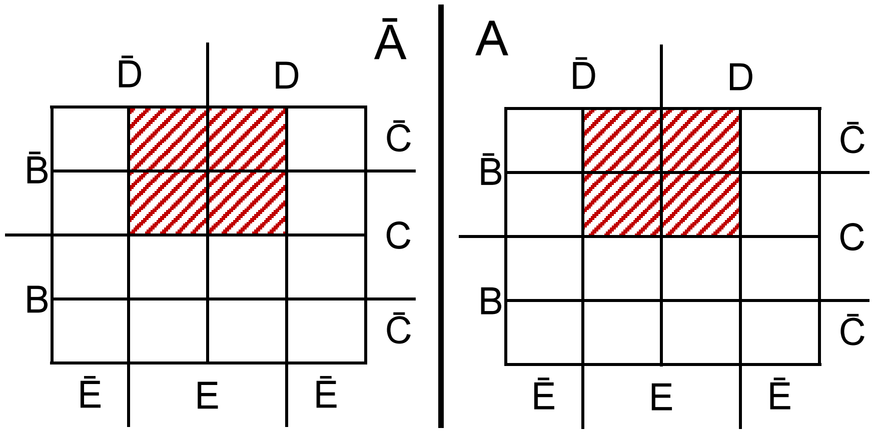
Oitavas (7/10)



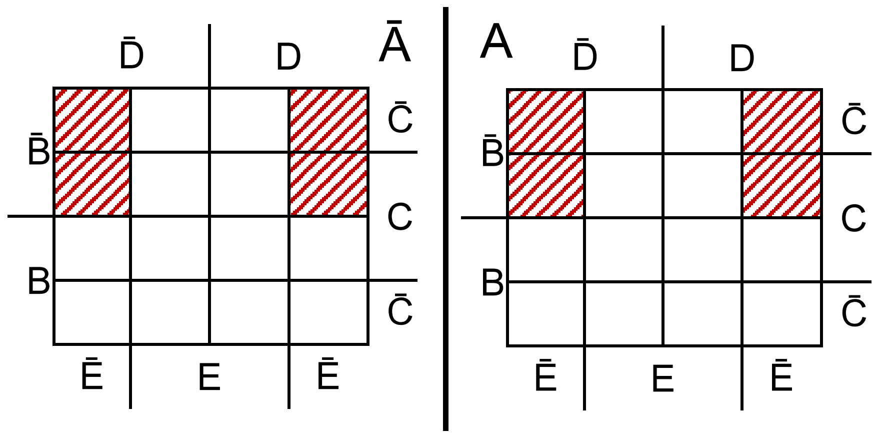
Região B.E



Região $B.\bar{E}$

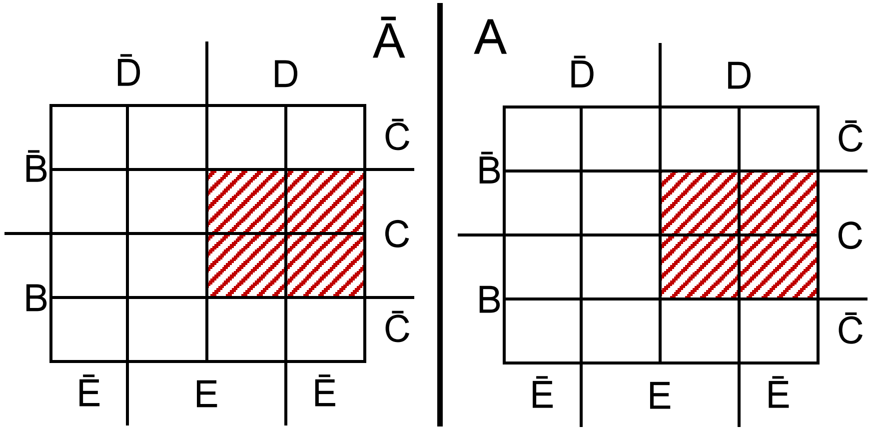


Região $\bar{B}.E$

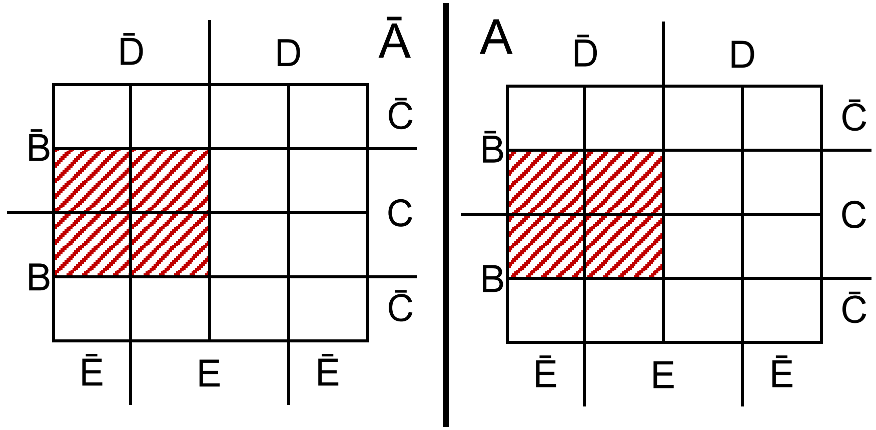


Região $\bar{B}.\bar{E}$

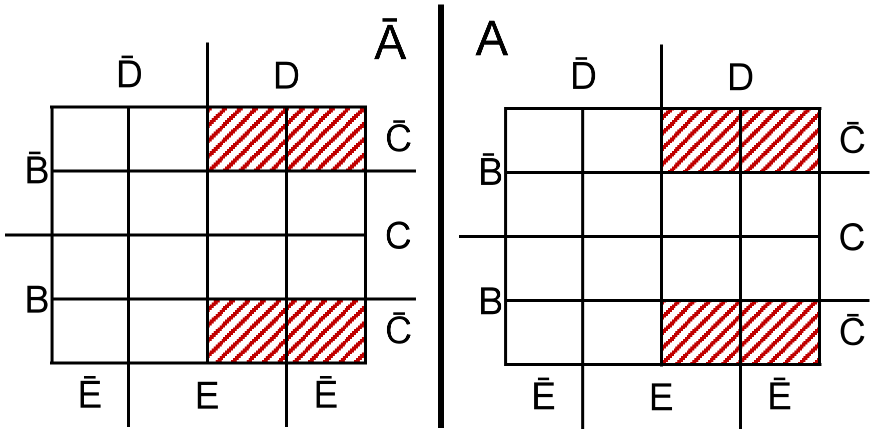
Oitavas (8/10)



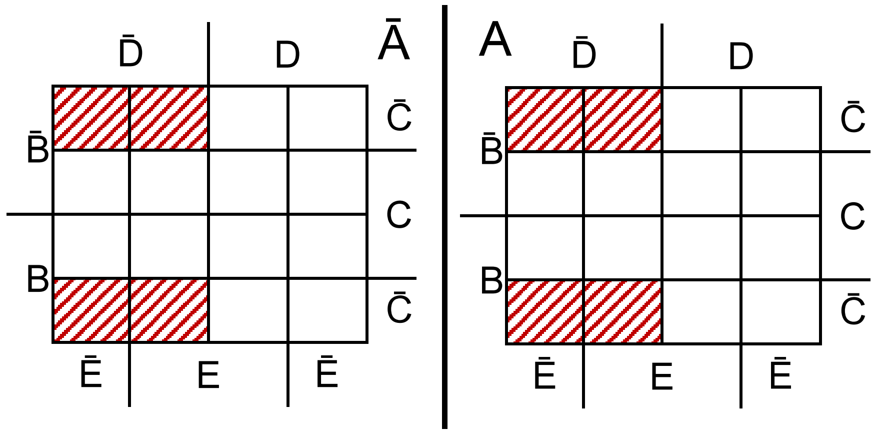
Região C.D



Região C.$\bar{D}$

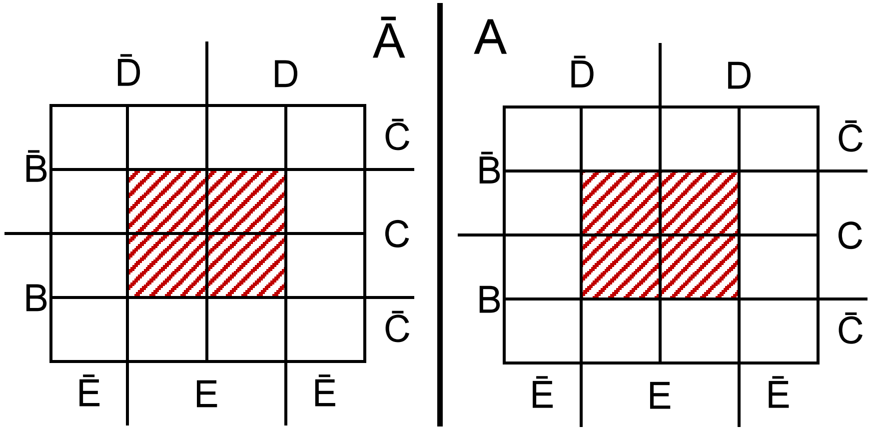


Região $\bar{C}$.D

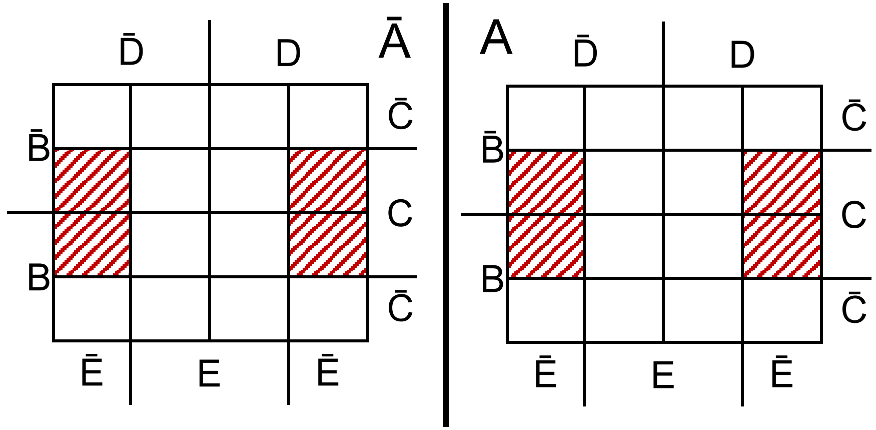


Região $\bar{C}$.$\bar{D}$

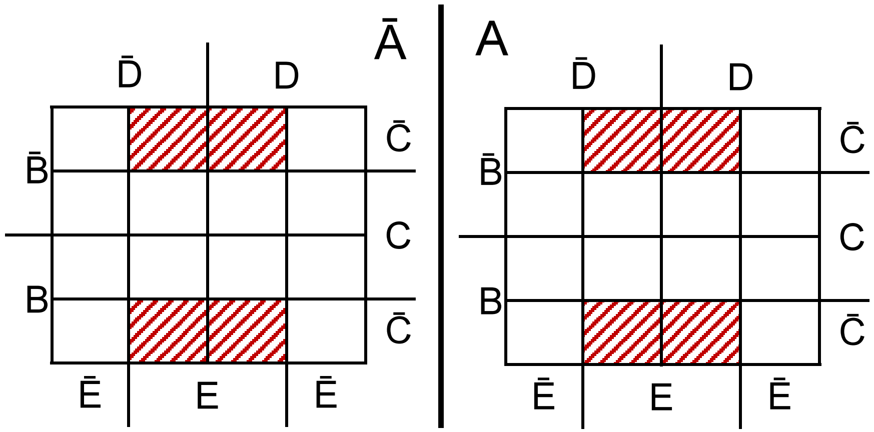
Oitavas (9/10)



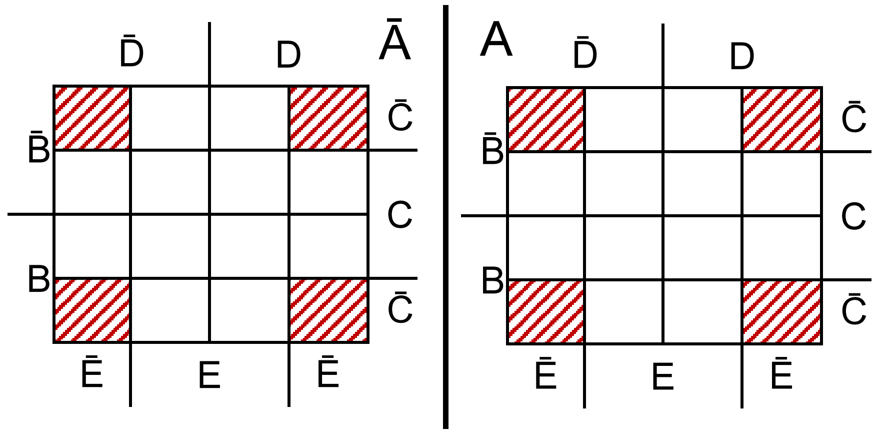
Região C.E



Região C.$\bar{E}$

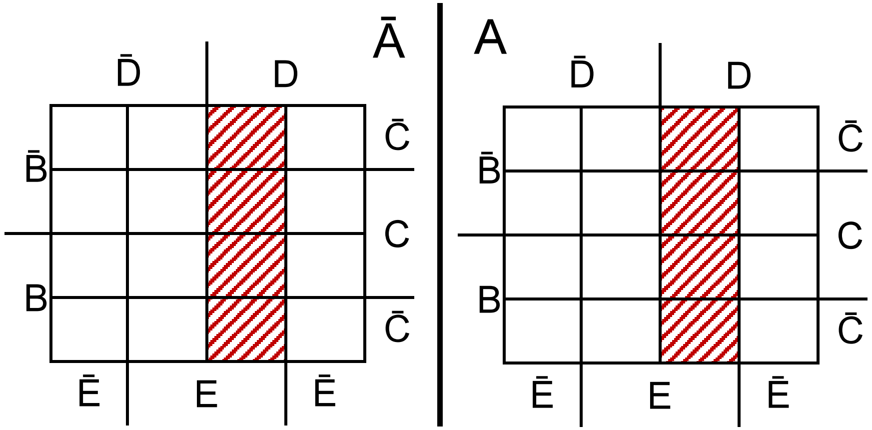


Região $\bar{C}$.E

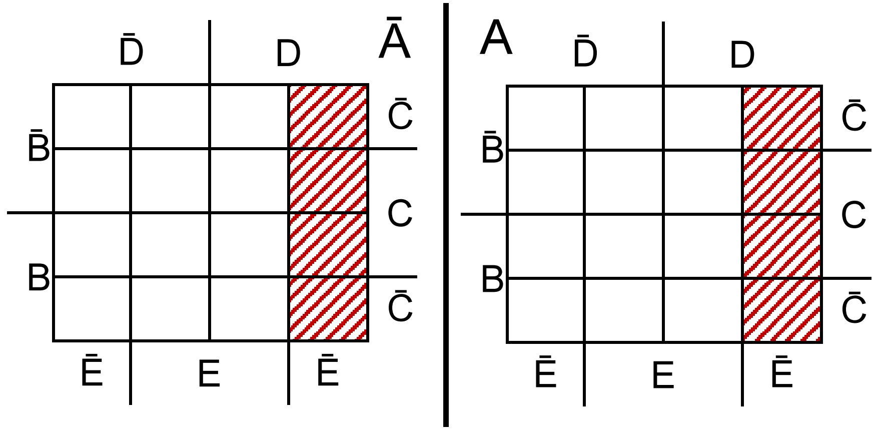


Região $\bar{C}$.$\bar{E}$

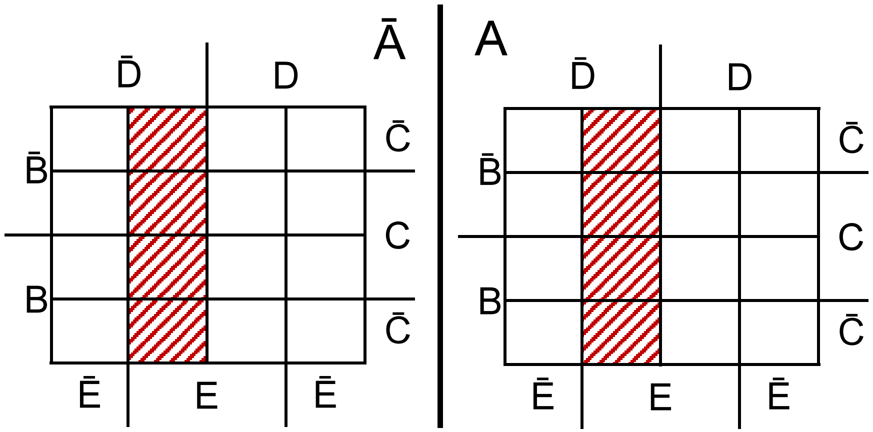
Oitavas (10/10)



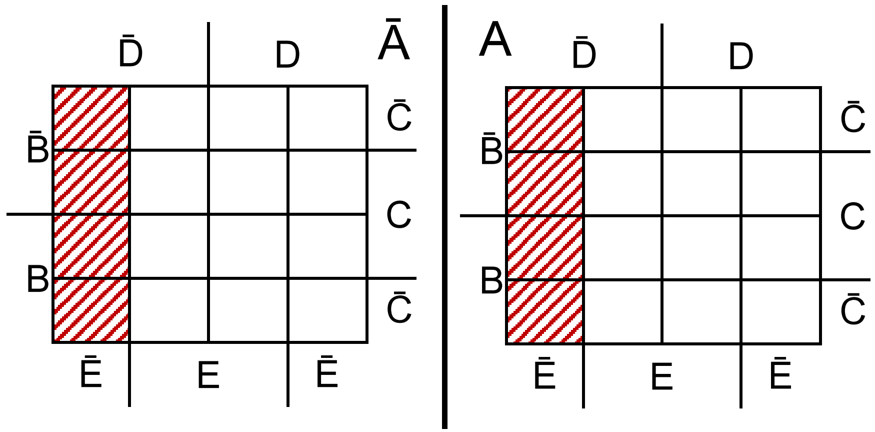
Região D.E



Região D.$\bar{E}$



Região $\bar{D}$.E



Região $\bar{D}$.$\bar{E}$

Exemplo: Simplifique o Circuito representado pelo diagrama

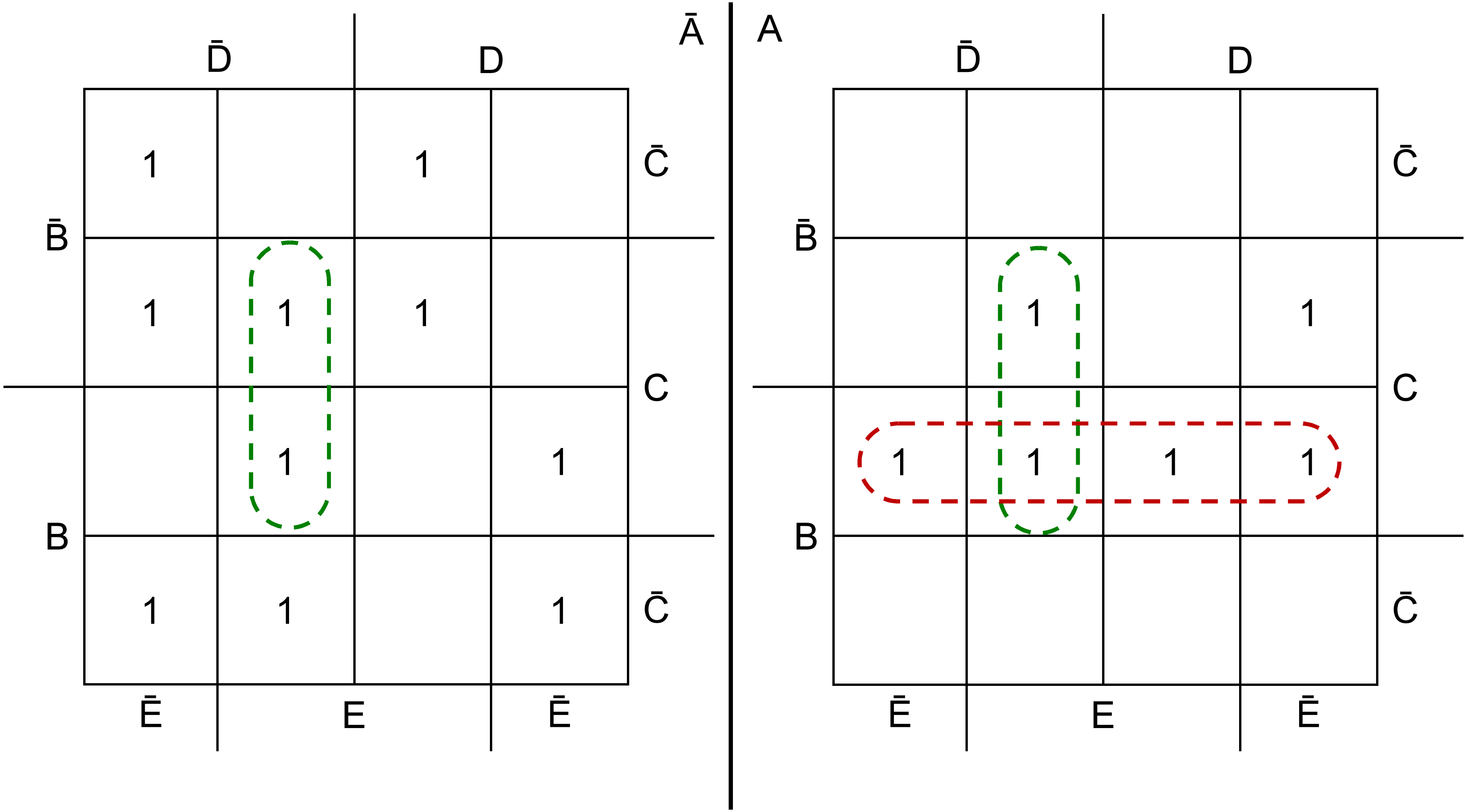
$\bar{A}$

	$\bar{D}$	$\bar{D}$	D	D	
$\bar{B}$	1	0	1	0	$\bar{C}$
$\bar{B}$	1	1	1	0	C
B	0	1	0	1	C
B	1	1	0	1	$\bar{C}$
	$\bar{E}$	E	E	$\bar{E}$	

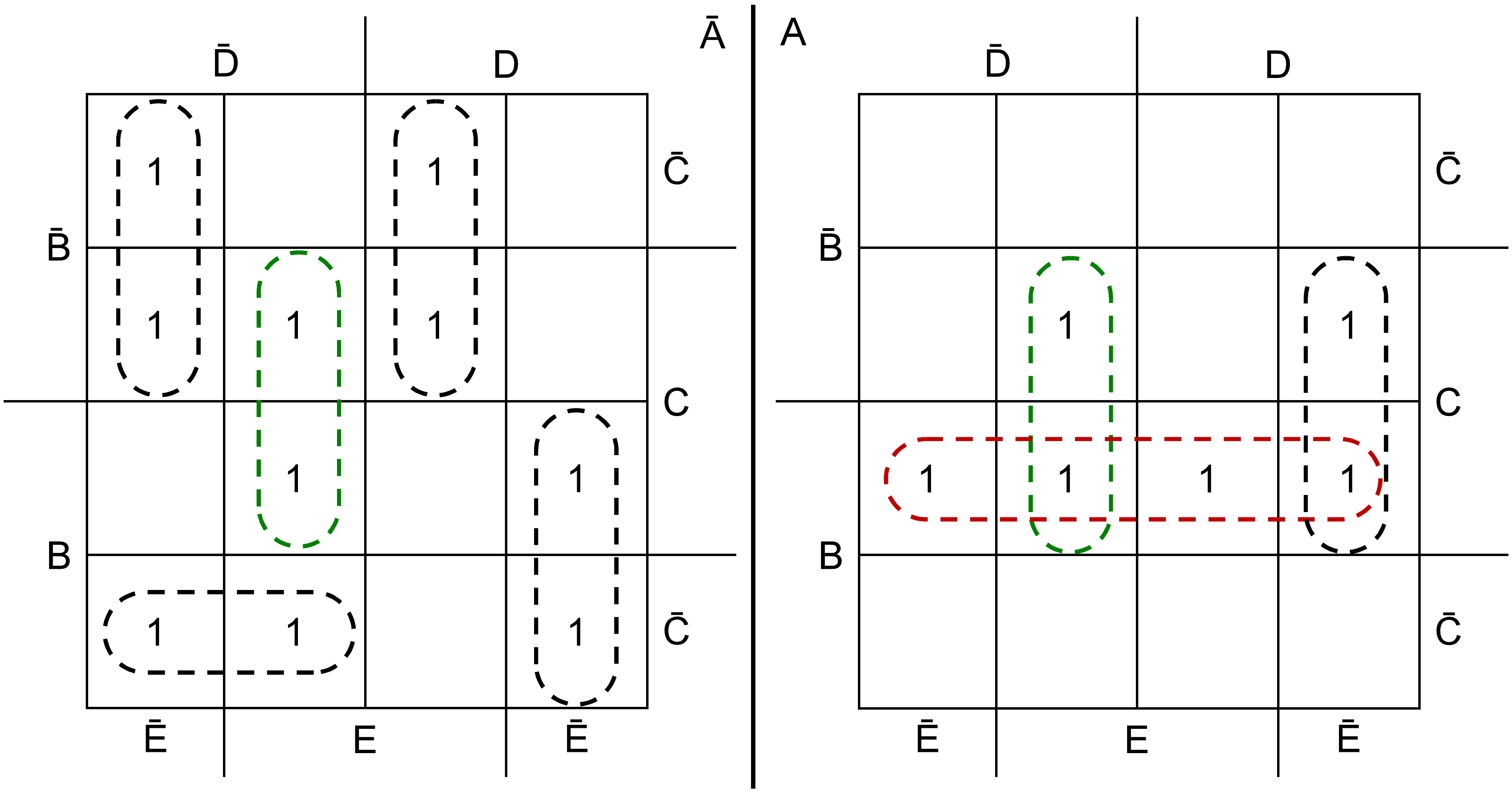
A

	$\bar{D}$	$\bar{D}$	D	D	
$\bar{B}$	0	0	0	0	$\bar{C}$
$\bar{B}$	0	1	0	1	C
B	1	1	1	1	C
B	0	0	0	0	$\bar{C}$
	$\bar{E}$	E	E	$\bar{E}$	

Exemplo: 2 Quadras



Exemplo: 2 Quadras, 5 Pares



$$S = A.B.C + C.\bar{D}.E + \bar{A}.\bar{B}.\bar{D}.\bar{E} + \bar{A}.\bar{B}.D.E + \bar{A}.B.\bar{C}.\bar{D} + \bar{A}.B.D.\bar{E} + A.C.D.\bar{E}$$

Exercício

$\bar{A}$

	$\bar{D}$		D		
$\bar{B}$	0	0	0	1	$\bar{C}$
$\bar{B}$	0	1	1	1	C
B	0	1	1	0	C
B	1	0	0	0	$\bar{C}$
	$\bar{E}$	E	E	$\bar{E}$	

A

	$\bar{D}$		D		
$\bar{B}$	0	0	0	1	$\bar{C}$
$\bar{B}$	0	1	1	1	C
B	0	1	1	0	C
B	1	0	0	0	$\bar{C}$
	$\bar{E}$	E	E	$\bar{E}$	

Solução

$\bar{A}$

	$\bar{D}\,\bar{E}$	$\bar{D}\,E$	$D\,E$	$D\,\bar{E}$
$\bar{B}\,\bar{C}$	0	0	0	1
$\bar{B}\,C$	0	1	1	1
$B\,C$	0	1	1	0
$B\,\bar{C}$	1	0	0	0

A

	$\bar{D}\,\bar{E}$	$\bar{D}\,E$	$D\,E$	$D\,\bar{E}$
$\bar{B}\,\bar{C}$	0	0	0	1
$\bar{B}\,C$	0	1	1	1
$B\,C$	0	1	1	0
$B\,\bar{C}$	1	0	0	0

$$S = C.E + \bar{B}.D.\bar{E} + B.\bar{C}.\bar{D}.\bar{E}$$

Casos Sem Simplificação

- Seja a expressão
  - $S = \bar{A}.B + A.B$
- Ao tentar simplificar a expressão pelo diagrama de Veitch-Karnaugh, nota-se que não é possível agrupar termos
- Nesse caso, a expressão dada já se encontra minimizada

- O mesmo ocorre com a expressão
  - $S = A.B + \bar{A}.\bar{B}$
- Que também se encontra minimizada

	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$	0	1
A	1	0

	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$	1	0
A	0	1

Casos Sem Simplificação

- O mesmo ocorre nas duas situações seguintes, que também não admitem simplificação
- Estes casos também ocorrem para 4 ou mais variáveis de entrada

	$\bar{B}\bar{C}$	$\bar{B}C$	BC	$B\bar{C}$
$\bar{A}$	0	1	0	1
A	1	0	1	0

	$\bar{B}\bar{C}$	$\bar{B}C$	BC	$B\bar{C}$
$\bar{A}$	1	0	1	0
A	0	1	0	1

Outra Maneira de Utilização

- Outra maneira de utilizar um diagrama Veitch-Karnaugh consiste em utilizar o complemento da expressão
- Assim, somente são considerados os casos onde a expressão S=0
  - Com isso, têm-se o complemento da função, que precisa, portanto, ser invertida
  - Isso corresponde a utilizar De Morgan

Diagrama de Veitch-Karnaugh pelo Complemento

- Usando o diagrama pelo método convencional, obtém-se
  - S = A + C

Situação	A	B	C	S
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

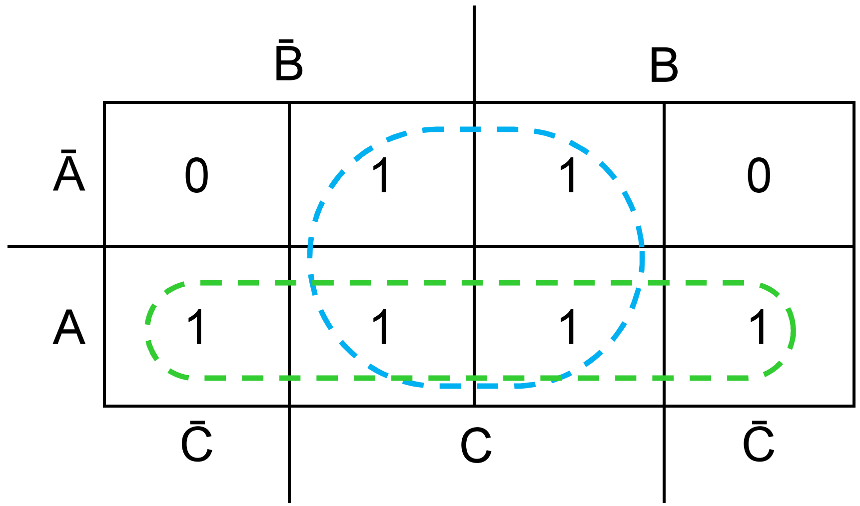


Diagrama de Veitch-Karnaugh pelo Complemento

- Usando o diagrama pelo método convencional, obtém-se
  - $S = A + C$
- Usando o complemento, tem-se
  - $\overline{S} = \bar{A}.\bar{C}$
- Portanto,
  - $S = (\bar{A}.\bar{C})'$
- Aplicando-se De Morgan na expressão acima, tem-se
  - $S = (\bar{A}.\bar{C})' = A + C$

Situação	A	B	C	S
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

	$\bar{B}$		B	
$\bar{A}$	0	1	1	0
A	1	1	1	1
	$\bar{C}$	C		$\bar{C}$

Resumo

- Neste apresentação foram vistos os postulados e propriedades da álgebra de Boole
- É importante lembrar que qualquer expressão booleana pode ser escrita de forma padronizada, obtida a partir da tabela verdade
  - Produto de Maxtermos
  - Soma de Mintermos
- Uma vez obtida a expressão booleana de um circuito, é possível realizar simplificações que visam reduzir redução de custo de fabricação dos circuitos
  - Fatoração (simplificação algébrica)
  - Diagrama de Veitch-Karnaugh (simplificação visual)

Slides baseados em:

- Idoeta, I.V. & Capuano, F.G.; Elementos de Eletrônica Digital, 12ª. edição, Érica, 1987.
- E. Mendelson; Álgebra booleana e circuitos de chaveamento, McGraw-Hill, 1977.