III OLIMPÍADA REGIONAL
DE MATEMÁTICA
DE RIBEIRÃO PRETO

Nível III

Ensino Médio

FASE FINAL - 29 de Novembro de 2008

Nome do aluno:____Telefone: ( )

Nome da escola:____Série:

INSTRUÇÕES

1. A prova pode ser feita a lápis ou caneta (é preferível a caneta).
2. Preencha a folha de respostas com seu nome, data de nascimento e não se esqueça de assiná-la.
3. A duração da prova é de 4 horas.
4. Não é permitido o uso de instrumentos de desenho, calculadoras ou quaisquer fontes de consulta.
5. Os espaços em branco na prova podem ser usados como rascunho.
6. Ao terminar a prova, entregue ao professor as folhas de respostas.

(Cada problema vale 10 pontos. Total de pontos 50)

Escreva as soluções completas dos problemas nas folhas de respostas com sua identificação. Tudo que você escrever será levado em conta na avaliação. **Justifique cada uma das respostas.**

---

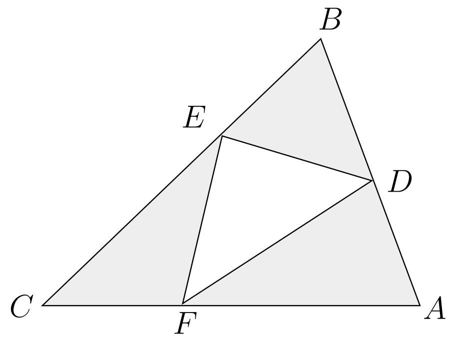
1. Mostrar que se a e b são números inteiros positivos então a seguinte desigualdade é válida:
$$4(a^3 + b^3) \geq (a + b)^3$$

2. Encontrar todos os números inteiros a e b satisfazendo a equação:
$$a^3 + b^3 = 9$$

3. Encontrar todas as soluções da equação:
$$\frac{\operatorname{sen}^3(\theta)}{2} + \frac{\cos^2(\theta)}{2} + \operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\theta}{2}) - 1 = 0.$$

4. Seja f uma função definida no conjunto dos números inteiros positivos satisfazendo
$$\begin{aligned} f(1) &= 2008, \\ f(1) &+ f(2) + \ldots + f(n) = n^2 f(n) \text{ para todo } n > 1. \end{aligned}$$
Calcular $f(2008)$.

5. Considere os triângulos ABC e DEF segundo o desenho abaixo.



Os pontos D, E, F respectivamente em AB, BC e CA, satisfazem

$$\frac{AD}{AB} = \alpha, \qquad \frac{BE}{BC} = \beta, \qquad \frac{CF}{CA} = \gamma,$$

sendo $\alpha + \beta + \gamma = 2/3$ e $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2/5$. Calcular:

$$\frac{\text{Área}\,(DEF)}{\text{Área}\,(ABC)}.$$