IV OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DE RIBEIRÃO PRETO

Nível III

Ensino Médio

Fase de Seleção - 26 de setembro de 2009

Nome do Aluno (a):______________________________

INSTRUÇÕES
1. A prova pode ser feita a lápis ou a caneta.
2. Preencha a ficha de respostas com seu nome, data de nascimento e não se esqueça de assiná-la.
3. A duração da prova é de 4 horas.
4. Não é permitido o uso de instrumentos de desenho, calculadoras ou quaisquer fontes de consulta.
5. Os espaços em branco na prova podem ser usados como rascunho.
6. Ao final da prova, entregue ao professor a ficha de respostas da parte A e a sua resolução da parte B.
7. O gabarito estará disponível no site `http://dfm.ffclrp.usp.br/mat/olimpiada` a partir de 28/09/09

Parte A
(Cada problema vale 4 pontos)

1. Cada questão tem 5 alternativas de respostas: (A), (B), (C), (D) e (E), e apenas uma delas é correta.
2. Para cada questão marque a alternativa na ficha de respostas, preenchendo o espaço dentro do círculo correspondente.

(A) (B) (C) (D) (E)

3. Marque apenas uma alternativa para cada questão. Atenção: se você marcar mais de uma alternativa, perderá os pontos da questão, mesmo que uma das alternativas seja a correta.

1. O número $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\dots}}}$ é um número:

   (A) Menor que $\sqrt{6}$ (B) Maior que 4 (C) Primo (D) Par (E) Irracional

2. Qual é a fração geratriz da dízima periódica 1,41424242... ?

   (A) $\dfrac{141}{100}$ (B) $\dfrac{14142}{10.000}$ (C) $\dfrac{14100}{9999}$ (D) $\dfrac{14001}{9900}$ (E) $\sqrt{2}$

3. Qual é a soma dos coeficientes do polinômio $(1-1998x+1999x^2)^{2001}$?

   (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 2^{2001} (E) 2002

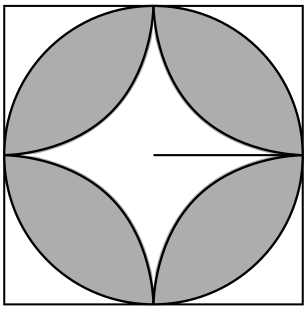
4. Em uma reunião social, cada pessoa cumprimenta todas as outras uma única vez. Havendo ao todo 15 apertos de mãos, quantas pessoas havia na reunião?

   (A) 13 (B) 7 (C) 6 (D) 5 (E) 12

5. Sabendo que as funções reais f e g são tais que $g(x)=3x-2$ e $f(g(x))=-3x+1$ para todo $x\in\mathbb{R}$, podemos afirmar que o valor $f(t)$ de f no ponto $t\in\mathbb{R}$ é:

(A) $-2t+3$ (B) $6t-1$ (C) t^2 (D) $2t+3$ (E) $-t-1$

6. A figura abaixo é formada por um quadrado Q, uma circunferência inscrita em Q de raio $r = 1\,\text{cm}$ e quatro arcos de circunferências de mesmo raio com centros nos vértices de Q. Qual é a área da região pintada?



(A) $\sqrt{2}\pi + 2\,\text{cm}^2$ (B) $4-\pi\,\text{cm}^2$ (C) $\frac{1}{4}\,\text{cm}^2$ (D) $2\pi - 4\,\text{cm}^2$ (E) $\frac{1}{\pi}\,\text{cm}^2$

7. Sabendo que as soluções da equação

$$x^2 + bx + 47 = 0$$

são números inteiros, podemos afirmar que:

(A) a diferença entre as duas raízes tem valor absoluto 46

(B) a soma das duas raízes tem valor absoluto 2

(C) b é positivo

(D) o valor absoluto da soma das duas raízes é 94

(E) b é negativo

8. Simplificando a expressão

$$\frac{\sec(x)\,\text{sen}^2(x)}{1+\sec(x)},$$

obtemos:

(A) $1-\cos(x)$ (B) $1-\text{sen}^2(x)$ (C) $\tan(x)$ (D) $1+\text{sen}(x)$ (E) $1+\tan(x)$

9. Se repartimos n balas entre 8 crianças em partes iguais sobram 3. Quantas balas sobram se agora repartimos $6n$ balas entre as 8 crianças, também em partes iguais?

(A) 1 (B) 6 (C) 2 (D) 3 (E) 12

10. Sejam x_1 e x_2 as duas soluções positivas e distintas da equação $x^{x^2-2x-7} = x$. A soma $x_1 + x_2$ é igual a:

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Parte B
(Cada problema vale 10 pontos)

Escreva as soluções completas dos dois problemas nas folhas de respostas com sua identificação. Tudo que você escrever será levado em conta na avaliação.

1. Para cada $a \in \mathbb{R}$, a equação $x + ay + a^2 = 1$ descreve uma reta no plano. Assim, a equação descreve uma família de retas. Mostrar que a família tem as seguintes propriedades:

   (a) Quaisquer duas retas distintas da família são concorrentes;

   (b) Três retas quaisquer da família nunca se interceptam num mesmo ponto.

2. Resolva a equação:

$$\frac{1}{2 + \dfrac{\cos(x)}{3 + \dfrac{\cos(x)}{4 + \dfrac{\cos(x)}{\ddots}}}} + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{\cos(x)}{3 + \dfrac{\cos(x)}{4 + \dfrac{\cos(x)}{\ddots}}}}} = \log_2(\operatorname{sen}^2(x) + 1).$$