V OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DE RIBEIRÃO PRETO

Nível III

Ensino Médio

Fase de Seleção - 15 a 17 de setembro de 2010

Nome do Aluno (a): ____

INSTRUÇÕES
1. A prova pode ser feita a lápis ou a caneta.
2. Preencha a ficha de respostas com seu nome, data de nascimento e não se esqueça de assiná-la.
3. A duração da prova é de 4 horas.
4. Não é permitido o uso de instrumentos de desenho, calculadoras ou quaisquer fontes de consulta.
5. Os espaços em branco na prova podem ser usados como rascunho.
6. Ao final da prova, entregue ao professor a ficha de respostas, a prova e os rascunhos.
7. O gabarito estará disponível no site `http://dfm.ffclrp.usp.br/mat/olimpiada` a partir do dia 20 de setembro.

(Cada questão vale 1 ponto)

1. Cada questão tem 5 alternativas de respostas: (A), (B), (C), (D) e (E), e apenas uma delas é correta.
2. Para cada questão marque a alternativa na ficha de respostas, preenchendo o espaço dentro do círculo correspondente.

(A) (B) (C) (D) (E)

3. Marque apenas uma alternativa para cada questão. Atenção: se você marcar mais de uma alternativa, perderá o ponto da questão, mesmo que uma das alternativas seja a correta.

1. Escrevem-se, em ordem estritamente crescente, os números inteiros e positivos que sejam múltiplos de 7 ou de 8 (ou de ambos), obtendo-se 7, 8, 14, 16, ... O 100º número escrito é:

   (A) 376 (B)384 (C)392 (D)400 (E)406

2. Numa praia com 4500 metros de extensão, deseja-se construir postos de salva-vidas de maneira que a distância, d, entre um posto e o mais próximo seja sempre a mesma, o mesmo valendo nos extremos da praia, ou seja, a distância entre um extremo e o seu posto mais próximo mede d. Pretende-se seguir a recomendação de que a distância d seja inferior a 350 metros. Sabendo que não teremos postos nos extremos da praia, qual o número mínimo de postos necessários?

   (A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 15 (E) 16

3. [1] João e Elisa saíram de casa às 15h00min e andaram primeiro por uma estrada reta, subiram um morro e logo voltaram seguindo o mesmo caminho até chegar em casa às 21h00min. A velocidade de João e Elisa era de 4 Km/h (quilometros por hora) na reta, de 3 Km/h na subida e de 6 Km/h na descida. Qual a distância, em quilometros, percorrida por João e Elisa?

   (A) 12 (B) 16 (C) 24 (D) 32 (E) 72

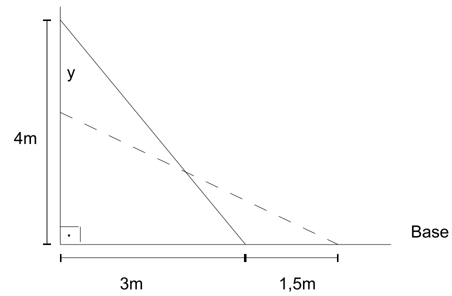
[1] Este problema é devido a Charles Lutwidge Dodgson, um matemático do século XIX melhor conhecido como Lewis Carroll, o autor de Alice no Pais das Maravilhas.

4. O produto de um milhão de números naturais, não necessariamente distintos, é igual a um milhão. Qual é o maior valor possível para a soma desses números?

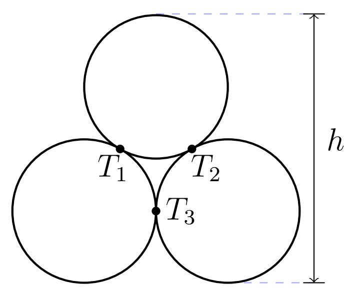
   (A) 1 000 000 (B) 1 250 002 (C) 1 501 999 (D) 1 999 999 (E) 13 999 432

5. Suponha que uma escada escorregue na base $1,5$ metros, conforme figura. Qual a medida y, em metros, que a escada escorrega na parede?

   (A) $y > 1,5$ (B) $y < 1,5$ (C) $y = 1,5$ (D) $y > 2$ (E) nenhuma das anteriores

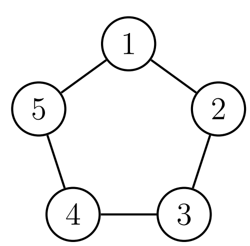


6. Considere a figura abaixo onde $T1$, $T2$ e $T3$ são pontos de tangência e o diâmetro de cada circunferência é 1 cm. Qual é o valor de h, em cm?



   (A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B)$\frac{3}{2}$ (C)$\sqrt{3}$ (D) $\frac{\sqrt{3}+2}{2}$ (E) 2

7. João ganhou um livro para colorir e uma das figuras era da seguinte forma:



   Ele tinha quatro lápis coloridos para pintar as bolinhas da figura: um azul, um amarelo, um vermelho e um verde. Decidiu que sua pintura ficaria mais bonita se bolinhas ligadas por uma aresta não tivessem a mesma cor. As arestas não seriam pintadas. De quantas maneiras diferentes João poderia pintar esta figura?

   (A) 24 (B) 216 (C) 240 (D) 540 (E) 1024

8. Os casais Alves, Barreira, Costa, Dutra, e Evaristo jantaram recentemente em um restaurante. As pessoas foram dispostas em uma mesa circular de tal maneira que os homens e as mulheres ficassem intercalados e cada mulher ficasse três lugares distante do seu marido. A senhora Costa ficou a direita do senhor Alves. O senhor Evaristo ficou dois lugares a esquerda do senhor Costa, e a senhora Evaristo ficou dois lugares a direita da senhora Barreira. Quem ficou a esquerda do senhor Alves?

   (A) Sra. Dutra (B) Sra. Evaristo (C) Sra. Barreira (D) Sra. Costa (E) Sra. Alves

9. A seguinte função, conhecida como a função de Ackermann, é definida para inteiros não negativos n e k pelas três equações seguintes:

$$\begin{array}{rl} (i) & f(0,n) = n+1, \\ (ii) & f(k,0) = f(k-1,1), \\ (iii) & f(k+1,n+1) = f(k, f(k+1,n)). \end{array}$$

   Calcule $f(2,2)$.

   (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

10. Quantos números inteiros positivos existem tal que estes apresentam algarismos em ordem crescente da esquerda para a direita, inclusive aqueles formados por um único algarismo, por exemplo: 3, 19, 356, 2589? Observe que não estamos considerando o número zero como um possível algarismo.

    (A) 511 (B) 512 (C) 1024 (D) 9! (E) 10!