IV OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DE RIBEIRÃO PRETO — **Nível III**

Ensino Médio

FASE DE SELEÇÃO - 26 de setembro de 2009

- **Cada questão da parte A vale 4 pontos e cada questão da parte B vale 10 pontos (total de pontos do nível III-fase de seleção = 60 pontos).**
- **Caro Professor, guarde a prova dos seus alunos. Lembre-se que a Comissão Organizadora poderá solicitar em qualquer momento a prova resolvida pelos alunos. Lembre-se também que o dia 09 de outubro é a data limite para o envio do relatório da Fase de Seleção. O referido relatório permitirá à Comissão Organizadora decidir a Nota de Corte para a Fase Final. A Nota de Corte será disponibilizada no dia 16 de outubro no site oficial do evento http://dfm.ffclrp.usp.br/mat/olimpiada.**

GABARITO PARTE A

No da Questão	Resposta
Questão No 1	C
Questão No 2	D
Questão No 3	D
Questão No 4	C
Questão No 5	E
Questão No 6	D
Questão No 7	A
Questão No 8	A
Questão No 9	C
Questão No 10	D

1. Seja $y = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \ldots}}}$. Note que $y > 0$ e $y^2 = 6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \ldots}} = 6 + y$. Logo, $y > 0$ e $y^2 - y - 6 = 0$ e, portanto, $y = 3$, o que é um número primo.

   Resposta: (C)

2. Seja $x = 1,414242\ldots$. É imediato que:

$$10.000x - 100x = 14142,4242\ldots - 141,4242\ldots = 14001.$$

Logo,

$$x = \frac{14001}{9900}.$$

Resposta: (D)

3. A soma dos coeficientes de um polinômio qualquer:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

é $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 + \ldots + a_n \cdot 1^n = P(1)$. Assim, a soma dos coeficientes do polinômio $Q(x) = (1 - 1998x + 1999x^2)^{2001}$ é $Q(1) = (1 - 1998 + 1999)^{2001} = 2^{2001}$.

Resposta: (D)

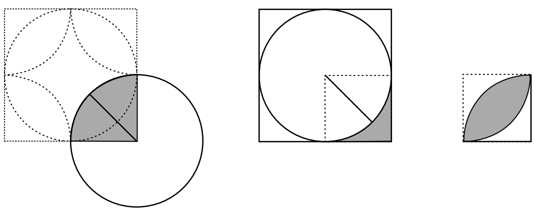
4. Seja n o número de pessoas presentes na reunião. O número de apertos de mãos é $\frac{n(n-1)}{2} = 15$. Assim, $n^2 - n - 30 = 0$ e portanto $n = 6$.

Resposta: (C)

5. Como $g(x) = 3x - 2$ e $f(g(x)) = -3x + 1$, temos que $f(3x - 2) = -3x + 1$. Definindo $t = 3x - 2$ obtemos que $x = \frac{t+2}{3}$ e $f(t) = -3\frac{t+2}{3} + 1 = -t - 1$.

Resposta: (E)

6. Observemos primeiro que a área pintada no desenho da figura 1.A é igual a $\pi r^2/4$. Por outro lado, a área do quadrado Q é $(2r)^2$ e a da circunferência inscrita no quadrado πr^2. Assim, a área pintada na figura 1.B é $((2r)^2 - \pi r^2)/4 = (4r^2 - \pi r^2)/4$. A área pintada na figura 1.C resulta da diferença das áreas pintadas em A e B, $(2\pi r^2 - 4r^2)/4$. A resposta é encontrada multiplicando por 4 o valor da área em C e substituindo $r = 1$, resultando no valor $2\pi - 4$.



Resposta: (D)

7. Sejam a e b as raízes da equação dada. Então: $(x-a)(x-b) = x^2 + bx + 47$. Desenvolvendo a expressão à esquerda e comparando os termos de mesmo grau, obtemos $ab = 47$, isto é, o produto das raízes é 47. Assim, ou $a = 1$ e $b = 47$, ou $a = -1$ e $b = -47$. Em ambos os casos, a diferença entre as raízes tem valor absoluto 46.

   Resposta: (A)

8. As seguintes identidades trigonométricas são válidas:

$$\frac{\sec(\mathrm{x})\operatorname{sen}^2(x)}{1+\sec(x)} = \frac{\frac{1}{\cos(x)}\operatorname{sen}^2(x)}{1+\frac{1}{\cos(x)}} = \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{1+\cos(x)} = \frac{1-\cos^2(x)}{1+\cos(x)} = 1-\cos(x).$$

   Resposta: (A)

9. Segue imediatamente do enunciado que existe um número inteiro k tal que:

$$n = 8k+3.$$

   Portanto:

$$\begin{aligned} 6n &= 6(8k+3) = 8(6k)+18 \\ &= 8(6k)+16+2 = 8(6k+2)+2. \end{aligned}$$

   Concluímos que se $6n$ é dividido por 8, então necessariamente o resto desta divisão é 2.

   Resposta: (C)

10. A equação inicial é equivalente a cada uma das seguintes equações:

$$\begin{aligned} (x^2-2x-7)\log(x) &= \log(x) \\ (x+2)(x-4)\log(x) &= 0 \end{aligned}$$

   Assim, $x=-2$, $x=4$ ou $x=1$. Portanto, a soma das raízes positivas é 5.

   Resposta: (D)

GABARITO PARTE B

1. Primeiramente devemos mostrar que duas retas distintas quaisquer da família são concorrentes. Considere duas retas r e s da família descritas por:

$$\begin{array}{lr} x + ay + a^2 = 1 & (r) \\ x + by + b^2 = 1 & (s) \end{array} \quad ,$$

onde $a \neq b$. Para achar o conjunto interseção $S = r \cap s$, isolamos x nas equações acima, obtendo a equação:

$$1 - ay - a^2 = x = 1 - by - b^2.$$

Assim:

$$(b - a)y + b^2 - a^2 = 0,$$

isto é,

$$(b - a)y + (b + a)(b - a) = 0.$$

E como $b \neq a$ (pois as retas são distintas), podemos dividir por $b - a$, obtendo: $y = -(a + b)$ e $x = 1 - a(-a - b) - a^2 = 1 + ab$. Logo $S = \{(1 + ab, -a - b)\}$ é um conjunto unitário e portanto as retas são concorrentes.

Para resolver o item 1. (b), suponha que r, s e t sejam três retas da família distintas duas-a-duas. Podemos supor que elas são descritas pelas equações:

$$\begin{array}{lr} x + ay + a^2 = 1 & (r) \\ x + by + b^2 = 1 & (s) \\ x + cy + c^2 = 1 & (t) \end{array} \quad ,$$

onde $a \neq b$, $b \neq c$ e $a \neq c$ (pois as retas são distintas duas-a-duas). Pelo item 1. (a), temos que $r \cap s = \{(1 + ab, -a - b)\}$ e $s \cap t = \{(1 + bc, -b - c)\}$. Note que $r \cap s = s \cap t$ se e somente se $a = c$, o que contraria a hipótese de que as retas são distintas duas-a-duas. Assim, $r \cap s \cap t = \emptyset$.

Critério de Correção

(a) Se o aluno acertar apenas a parte 1. (a) do exercício, ele ganha 5 pontos;

(b) Se o aluno acertar apenas a parte 1.(b) do exercício, ele ganha 5 pontos;

(c) Se o aluno acertar o exercício todo, ele ganha 10 pontos.

2. Seja

$$y = \cfrac{\cos(x)}{3 + \cfrac{\cos(x)}{4 + \cfrac{\cos(x)}{\ddots}}}$$

Então:

$$\frac{1}{2+y} + \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+y}} = \log_2(\operatorname{sen}^2(x) + 1). \tag{1}$$

Isto é:

$$\frac{1}{2+y} + \frac{1+y}{2+y} = \log_2(\operatorname{sen}^2(x) + 1).$$

Assim:

$$1 = \log_2(\operatorname{sen}^2(x) + 1).$$

e

$$2 = \operatorname{sen}^2(x) + 1.$$

Portanto $\operatorname{sen}^2(x) = 1$, o que implica que o conjunto solução da equação dada é $\{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Critério de Correção

(a) Se o aluno escrever a equação (1), ele ganha 4 pontos;

(b) Se o aluno, além de escrever a equação (1), também conseguir resolvê-la, ele ganha 10 pontos (o que já inclui os 4 pontos do item (a)).