IV OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DE RIBEIRÃO PRETO

Nível II

8^o e 9^o ano do Ensino Fundamental

FASE DE SELEÇÃO - 26 de setembro de 2009

- **Cada questão da parte A vale 4 pontos e cada questão da parte B vale 10 pontos (total de pontos do nível II-fase de seleção = 60 pontos).**
- **Caro Professor, guarde a prova dos seus alunos. Lembre-se que a Comissão Organizadora poderá solicitar em qualquer momento a prova resolvida pelos alunos. Lembre-se também que o dia 09 de outubro é a data limite para o envio do relatório da Fase de Seleção. O referido relatório permitirá à Comissão Organizadora decidir a Nota de Corte para a Fase Final. A Nota de Corte será disponibilizada no dia 16 de outubro no site oficial do evento http://dfm.ffclrp.usp.br/mat/olimpiada.**

GABARITO PARTE A

No da Questão	Resposta
Questão No 1	B
Questão No 2	B
Questão No 3	C
Questão No 4	E
Questão No 5	B
Questão No 6	E
Questão No 7	D
Questão No 8	D
Questão No 9	B
Questão No 10	B

1. Sejam a, b e c os três números inteiros positivos. Então,

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc) = 134 + 2 \times 95 = 324$$

e, portanto, $a + b + c = \sqrt{324} = 18$.

Resposta: (B)

2. Vamos supor que o preço do carrinho era x reais em 09 de novembro. Este preço teve um acréscimo de 15%, logo, o carrinho passou a custar $x + \frac{15}{100}x = \frac{115}{100}x$. Com o desconto de 25%, o carrinho passou a custar $\frac{115}{100}x - \frac{25}{100} \cdot \frac{115}{100}x$. Portanto, a diferença seria

$$x - \left(\frac{115}{100}x - \frac{25}{100} \cdot \frac{115}{100}x\right) = \frac{10.000x - 11.500x + 2.875x}{10.000} = \frac{1375}{10.000}x = 13,75\%x,$$

isto é, a economia seria de 13,75%.

Resposta: (B)

3. Sejam q o número de quartos e p o número de pessoas. Pelos dados do problema temos que:

$$\begin{cases} q = \dfrac{p}{7} + 1 \\ p = 5q + 1. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos $q = 4$ e $p = 21$.

Resposta: (C)

4. Se multiplicarmos cada termo da forma $\dfrac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$ por $\dfrac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}$, obtemos a expressão $-(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) = -\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$. Assim,

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{999}+\sqrt{1000}} =$$

$$-\sqrt{1} + \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{4} - \sqrt{4} + \sqrt{5} - \cdots - \sqrt{999} + \sqrt{1000} =$$

$$= \sqrt{1000} - \sqrt{1} = 10\sqrt{10} - 1.$$

Resposta: (E)

5. Sabemos que 50 alunos têm apenas aulas de inglês, 50 têm apenas aulas de francês e 5 alunos têm aulas dos três idiomas. Vamos denotar por:
a = número de alunos que têm aulas de inglês e alemão, mas não têm aulas de francês;
b = número de alunos que têm aulas de inglês e francês, mas não têm aulas de alemão;

c = número de alunos que têm aulas de francês e alemão, mas não têm aulas de inglês;
d= número de alunos que têm apenas aulas de alemão.
Se 80 alunos não têm aulas de francês: $a + d + 50 = 80 \rightarrow d = 30 - a$.
O total de alunos é 160, logo 80 alunos têm aulas de francês, e assim, $b+c+50+5 = 80 \rightarrow b + c = 25$.
Se metade dos alunos que têm aulas de alemão também têm aulas de inglês, então $\frac{a + c + d + 5}{2} = a + 5$, e assim, $d + c = a + 5 \rightarrow c = a + 5 - d = 2a - 25$.
Como o número de alunos que têm aulas de inglês é o dobro do número de alunos que têm aulas de alemão: $50+5+a+b = 2(a+5+c+d) = 4(a+5) \rightarrow b = 3a-35$.
Assim, $b + c = 25 \rightarrow 3a - 35 + 2a - 25 = 25 \rightarrow a = 17$ e o número de alunos que têm aulas de inglês e alemão é $17 + 5 = 22$

Resposta: (B)

6. Se um ônibus passou as 15h42m então o próximo passou as 15h49m, o seguinte as 15h56m e outro as 16h03m. Entre 16h03m e 18h03m temos 2 horas, ou equivalentemente, 120 minutos. Dividindo 120 por 7 obtemos:

$$120 = 17 \times 7 + 1;$$

em outras palavras, nestas duas horas passarão 17 ônibus e ainda sobrará 1 minuto. Sendo assim, passará um ônibus as 18h02 minutos. Portanto, caso alguém chegue no ponto as 18h03m tal pessoa deverá esperar por 6 minutos pelo próximo ônibus.

Resposta: (E)

7. Denotando por x o número de notas de 10 e por y o número de notas de 5 temos:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 10x & + & 5y & = & 70 \\ x & + & y & = & 10 \end{array} \right. .$$

Resolvendo o sistema acima, obtemos $y = 6$.

Resposta: (D)

8. A sequência sugere que o número de vezes que o algarismo 1 aparece no segundo membro da igualdade é igual ao número da segunda parcela do primeiro membro da igualdade.

Resposta: (D)

9. Seja a o algarismo procurado. Então, 4 divide $7a6$ e 9 divide $7a6$. Pelos critérios de divisibilidade, temos que 4 divide $a6$ e 9 divide $7 + a + 6 = 13 + a$. Como 4

divide $a6$ as possibilidade para a são $a = 1, 3, 5, 7, 9$. Para tais valores de a a única possibilidade de 9 dividir $13 + a$ é $a = 5$.

Resposta: (B)

10. Suponha que a rampa seja um retângulo de medidas x e z, sendo que um dos lados de medida x "toca" o chão. Ao meio-dia a sombra da rampa forma um retângulo de medidas x e y. Então,

$$xy = 36 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{36}{x}$$

e

$$\cos 60 = \frac{y}{z} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{y}{z} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{z}{2}.$$

Logo,

$$\frac{36}{x} = \frac{z}{2}$$

e, portanto, a área da rampa $= xz = 72\,m^2$.

Resposta: (B)

GABARITO PARTE B

1. Primeiramente, observamos que de 1 até 99, o número 1 aparece 10 vezes na unidade e 10 vezes na dezena. Então, de 1 até 999, o número 1 aparece 100 vezes na unidade, 100 vezes na dezena e 100 vezes na centena, portanto, 300 vezes. De 1000 até 1999, o número 1 aparece 1300 vezes. Assim, de 1 até 1999 teremos 1600 vezes o número 1.Entre 2000 e 2999, temos o número 1 impresso 300 vezes.Então, de 1 até 2999 o número 1 aparece 1900 vezes. Agora, faltam 113 vezes. De 3000 a 3099, o número 1 aparece 20. De 3100 a 3169 aparece 87 vezes. Logo, de 1 até 3169 aparece 2007 vezes. Como faltam 6 vezes, o número de páginas é 3174.

   Critério de Correção:
   (a) Se o aluno perceber quantas vezes o número 1 aparece na unidade, na dezena e na centena, 03 pontos.
   (b) Se conseguir fazer a contagem até 3000, 07 pontos.
   (c) Se o aluno conseguir contar todas as vezes que aparece o número 1, 10 pontos.

2. Suponha que a pessoa tenha nascido em $18ab$ e morrido em $19cd$. Pelas hipósteses temos:

$$19cd - 18ab = 64 \quad \Rightarrow \quad ab + 64 = 1cd = 100 + cd$$

e

$$ab = 2 \times (cd).$$

Das equações acima, obtemos:

$$2 \times (cd) + 2 \times 32 = 100 + cd \quad \Rightarrow \quad 2 \times (cd + 32) = 100 + cd \quad \Rightarrow \quad cd + 32 = 50 + \frac{cd}{2}$$

e, consequentemente,

$$\frac{cd}{2} = 18 \quad \Rightarrow \quad cd = 36.$$

Portanto, a pessoa morreu em 1936 e tinha $64 - 36 = 28$ anos em 1900.

Critério de Correção:
(a) Se escrever $19cd - 18ab = 64$ então 1,0 ponto
(b) Se escrever $ab + 64 = 1cd$ então mais 2,0 pontos.
(c) Se escrever $ab = 2 \times (cd)$ então mais 1,0 ponto.
(d) Se escrever $2 \times (cd) + 2 \times 32 = 100 + cd$ então mais 3,0 pontos.
(e) Se finalizar corretamente então mais 3,0 pontos.