IV OLIMPÍADA REGIONAL	**Nível I**
DE MATEMÁTICA	**6^o e 7^o ano do Ensino Fundamental**
DE RIBEIRÃO PRETO	**FASE DE SELEÇÃO - 26 de setembro de 2009**

- **Cada questão da parte A vale 4 pontos e cada questão da parte B vale 10 pontos (total de pontos do nível I-fase de seleção = 60 pontos).**
- **Caro Professor, guarde a prova dos seus alunos. Lembre-se que a Comissão Organizadora poderá solicitar em qualquer momento a prova resolvida pelos alunos. Lembre-se também que o dia 09 de outubro é a data limite para o envio do relatório da Fase de Seleção. O referido relatório permitirá à Comissão Organizadora decidir a Nota de Corte para a Fase Final. A Nota de Corte será disponibilizada no dia 16 de outubro no site oficial do evento http://dfm.ffclrp.usp.br/mat/olimpiada.**

GABARITO PARTE A

No da Questão	Resposta
Questão No 1	C
Questão No 2	B
Questão No 3	E
Questão No 4	B
Questão No 5	B
Questão No 6	C
Questão No 7	D
Questão No 8	B
Questão No 9	D
Questão No 10	C

1. Como Lúcia chegou às 14h45min, subtraímos 25 minutos (tempo da caminhada) para obter o horário em que a mãe de Bruna deixo Lúcia no ponto. Esta conta resulta em 14h20min. Subtraindo agora 1 hora e 25 minutos (tempo de percurso de carro) obtemos que Lúcia saiu da casa de Bruna às 12h55min. Resposta letra (C).

2. O total de gastos feito por Luana e Luciana é de: $54,77 + 78,20 + 38,25 + 39,50 = 210,72$ reais. Sendo assim, cada uma deverá contribuir com $\frac{210,72}{2} = 105,36$ reais. Como Luana gastou $54,77 + 78,20 = 132,97$ reais então Luciana deverá entregar para Luana $132,97 - 105,36 = 27,61$ reais. Resposta (B)

3. No primeiro corte obtemos $2 = 2^1$ folhas, no segundo corte $4 = 2^2$ folhas, no terceiro $8 = 2^3$ folhas, no quarto corte $16 = 2^4$ folhas. Seguindo este processo recursivo podemos deduzir que no décimo corte obteremos $2^{10} = 1024$ folhas. Como a espessura por folha é de $0,01$ milímetros, a altura da pilha formada por estas folhas será $1024 \times 0,01 = 10,24$ milímetros $= 1,024$ centímetros. Resposta (E)

4. A alternativa incorreta é (B), pois

$$\sqrt{121} = 11 > 9 = (3^6)^{1/3} = (729)^{1/3}.$$

5. Para respondermos ao exercício usamos um fato mais geral. Dados quaisquer dois números x e y que têm como algarismo da unidade o número um (1), existem números reais a e b tais que $x = a \times 10 + 1$ e $y = b \times 10 + 1$. Segue da propriedade associativa que

$$x \times y = a \times b \times 10^2 + a \times 10 + b \times 10 + 1 = c \times 10 + 1,$$

com $c = a \times b \times 10 + a + b$. Logo o produto deles ainda tem como algarismo da unidade o número um (1). Logo, a alternativa correta é (B).

6. Denotemos por n o número de figurinhas de João e por m o número de figurinhas de Carlitos. As duas condições do problema podem ser escritas pelas seguintes relações

$n+1 = m-1$ (João ganhando uma figurinha de Carlitos terão a mesma quantidade)

$m + 1 = 2(n - 1)$ (Carlitos ganhando uma figurinha de João terá o dobro de João)

estas relações podem ser escritas como

$$m - n = 2, \quad \text{e} \quad m - 2n = -3$$

Resolvendo o sistema obtemos que $m = 7$ e $n = 5$. Assim o número total de figurinhas é 12. Resposta (C)

7. Temos que

$$\frac{1+2+3+\cdots+84}{9} = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9}{9}$$
$$+\frac{10+11+12+13+14+15+16+17+18}{9} + \cdots + \frac{82+83+84}{9}.$$

Como,

$$resto(1+2+3+4+5+6+7+8+9 \div 9) = resto(45 \div 9) = 0,$$

$$resto(10+11+12+13+14+15+16+17+18 \div 9) = resto(45 \div 9) = 0,$$

e assim sucessivamente até o último múltiplo de 9 na soma, que é 81, então $resto[(1+2+3+\cdots+84 \div 9)] = resto[(1+2+3+4+5+6+7+8+9) \div 9] + resto[(10+11+12+13+14+15+16+17+18) \div 9] + \cdots + resto[(82+83+84) \div 9]$.

Logo,

$$resto(1+2+3+...+84 \div 9) = resto(82+83+84 \div 9) = resto(33 \div 9) = 6,$$

ou seja, a alternativa correta é (D).

8. Observe que $20+24\times150 = 3620$ e $470+35\times90 = 3620$, logo tanto o primeiro amigo quanto o segundo farão paradas no quilômetro 3620, lugar de onde parte o terceiro amigo. Logo, fica mais fácil pensar em retroceder a partir do quilômetro 3620. Como o mínimo múltiplo comum $mmc\{150, 90, 180\} = 900$, obtém-se as paradas em comum, a saber, $2720, 1820$ e 920. Logo, a alternativa correta é (B).

9. Denotemos por x o número procurado. Como x é múltiplo de 13 e admite 5^2 com um de seus fatores, então x se escreve como $13 \times 5^2 \times m$, para algum número inteiro positivo m. Sendo o número x maior que $(44)^2$ e menor que $(45)^2$ teremos que

$$(44)^2 < 13 \times 5^2 \times m < (45)^2$$

De $13\times5^2\times m < (45)^2$ concluímos que $13\times m < 81$, logo m só poderia ser $1, 2, 3, 4, 5$ ou 6. Mas a desigualdade $(44)^2 < 13 \times 5^2 \times m$ implica que o único valor possível para m é 6. Logo $x = 13 \times 5^2 \times 6 = 1950$. Como a soma de seus algarismos é 15 a resposta é (D)

10. Caso realize o pagamento a vista, obtém um desconto de

$$600 \times \frac{5}{100} = 30 \text{ r}eais.$$

Caso pague parcelado, aplicará os $R\$400,00$ reais, obtendo, no primeiro mês, um rendimento de

$$400 \times \frac{2}{100} = 8 \text{ r}eais.$$

Após pagar a segunda parcela, aplicará os $408 - 200 = 208$ reais obtendo um rendimento de

$$208 \times \frac{2}{100} = 4,16 \text{ r}eais.$$

Com isso, concluímos que teu avô economizaria dinheiro pagando à vista, cujo valor economizado é $30 - 12,16 = 17,84$ reais, portanto a resposta é (C).

GABARITO PARTE B

1. Por comodidade chamaremos a ponta de qualquer caneta de extremo inicial. O outro extremo da caneta será chamado de extremo final. Para resolver o problema João poderia proceder do seguinte modo: colocar as canetas de 12 e 15 cm alinhadas de modo que a ponta final da caneta de 12 cm coincida com o extremo inicial da caneta de 15 cm. Ao fazer isto conseguirá obter uma marcação de 27 cm. Daí ele coloca o extremo inicial da caneta de 10 cm no extremo final de 15 cm de tal modo que aponte na direção do ponto inicial da caneta de 12 cm. Desse modo, o segmento que une o ponto inicial da caneta de 12 cm ao ponto final da caneta de 10 cm terá comprimento $(12 + 15) - 10 = 17\,cm$. Finalmente utilizando a marcação 17cm com a caneta de 12 cm obtém-se os pontos procurados por João.

   Critério de correção:

   Se o aluno resolver a questão fazendo um desenho, só ganhará os 10 pontos se no desenho ficar explicitamente claro a posição das canetas. Se o aluno ao tentar responder a questão de forma discursiva tiver problemas na argumentação, o aluno poderá ganhará os 10 pontos só se ficar claro que o aluno sabia a resposta mas teve dificuldades na argumentação. Se o aluno simplesmente colocar $[(12+15)-10]+12$, ou uma expressão equivalente e não dizer mais nada, o aluno só ganhará 08 pontos.

2. O melhor modo de poupar querosene é fazer paradas de 10 minutos (paradas por mais tempo não são permitidas). Com cada parada (de 10 minutos) poupamos 1 litro de querosene, mas consumimos meio litro ao ligar novamente o motor. É claro que em princípio a melhor estratégia para poupar querosene seria intercalar períodos de 15 minutos de funcionamento (períodos mais curtos não são permitidos) com períodos de 10 minutos de parada. Em cada processo de “arranque-15 minutos funcionando-10 minutos de parada”o motor consume $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times 6 = 2$ litros de querosene. Para completar as 10 horas que dura a noite, necessitaríamos $\frac{600}{25} = 24$ dos processos indicados. Mas existe um modo de poupar mais meio litro. Quando se inicia a noite podemos esperar 10 minutos sem acender o farol. Se depois consideramos 23 processos “arranque-15 minutos funcionando - 10 minutos de parada”, completaríamos 9h45min, então teríamos que voltar a acender o gerador e fazê-lo funcionar os 15 minutos restantes, consumindo portanto 48 litros. Mas, se em um dos períodos de funcionamento fizermos o motor funcionar por 30 minutos ininterruptos e “usarmos”os 10 minutos de parada como os últimos 10 minutos da noite, então o tempo de funcionamento seria o mesmo só que deste modo teríamos poupado um arranque, isto é, meio litro de querosene. Podemos então concluir que para cumprir a tarefa bastam 47,5 litros. Note-se que não existe nenhum outro processo que permita diminuir a quantidade de litros necessária pois isto implicaria em aumentar o tempo de desligamento do farol (o que não é possível pelas condições

de funcionamento) ou encontrar um novo arranjo dos processos indicados anteriormente. Como qualquer um desses processos nos dá 48 ou $47,5$ litros, então $47,5$ litros é a quantidade mínima necessária.

Critério de correção:

Nesta questão, gráficos descrevendo o processo podem ser considerados parte importante da justificativa. Se o aluno afirmar que a resposta é 48 sem justificar, ganhará 02 pontos. Se o aluno responder que é $47,5$ sem justificar ganhará 05 pontos. Se o aluno argumentar que a quantidade mínima necessária é conseguida com o ciclo, 'arranque-15 minutos funcionando - 10 minutos de parada", e fazendo as contas conclui que é 48 litros, ganhará no máximo 07 pontos.