**II OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DE RIBEIRÃO PRETO**

# Nível III

**Nível Médio**

**FASE FINAL - 10 de novembro de 2007**

Nome do Aluno (a):______________________________

**INSTRUÇÕES**

1. A prova pode ser feita a lápis ou caneta (é preferível a caneta).
2. Preencha a ficha e folha de respostas com seu nome, data de nascimento e não esqueça de assiná-lo.
3. A duração da prova é de 4 horas.
4. Não é permitido o uso de instrumentos de desenho, calculadoras ou quaisquer fontes de consulta.
5. Os espaços em branco na prova podem ser usados para rascunho.
6. Ao final da prova, entregue ao professor a ficha e folhas de respostas.

**(Cada problema vale 10 pontos. Total de pontos 50)**

Escreva as soluções completas dos problemas nas folhas de respostas com sua identificação. Tudo que você escrever será levado em conta na avaliação. **Justifique cada uma das respostas.**

1. Considere todas as funções de variavel real $f(x)$ da forma $f(x) = ax + b$, sendo $a$ e $b$ são números reais. Se $f^2(x) = f(f(x))$, $f^3(x) = f(f(f(x)))$ e em geral, $f^n(x) = \underbrace{f(f(\ldots f}_{n \ vezes}(x)\ldots))$. Para que valores de $a$ e $b$ se verifica que $f^{2000}(x) = x$ para todo número real $x$?.

2. Quantos números capicuas de 5 algaritmos são multiplos de 37? Lembre-se que um número é dito capicua se quando lido da esquerda para direita ou da direita para esquerda, representa sempre o mesmo valor.

3. Três números reais não nulos x, y, z, nesta ordem, estão em Progressão Aritmética. Seus quadrados, na mesma ordem, também estão em Progressão Aritmética. Nestas condições, prove que x, y, z, nesta ordem, também estão em Progressão Geométrica.

4. Mostre que entre qualquer grupo de seis pessoas, pelo menos três são mutuamente conhecidas, ou pelo menos três são completamente estranhas.

5. Considere a aplicação $T$ que a cada 4-upla $(a, b, c, d)$ formada por números inteiros positivos (possivelmente 0) nos dá a 4-upla,

$$T(a, b, c, d) = \big(|a - b|, |b - c|, |c - d|, |d - a|\big),$$

onde $|x|$ denota o valor absoluto de número $x$. Assim, por exemplo,

$T(0,1,2,3) = (|0-1|, |1-2|, |2-3|, |3-0|) = (1,1,1,3)$, e

$T(1,1,1,3) = (|1-1|, |1-1|, |1-3|, |3-1|) = (0,0,2,2)$.

Considere $E_0 = (a,b,c,d)$, $E_1 = T(E_0)$, $E_2 = T(E_1)$, e recursivamente

$$E_{i+1} = T(E_i), \text{ para } \text{ cada } i = 1,2,3\ldots$$

Será que a partir de alguma etapa a seqüência $E_0$, $E_1 = T(E_0)$, $E_2 = T(E_1)$, $E_3 = T(E_2), \ldots$, passará a ser $(0,0,0,0)$ independentemente dos valores iniciais de $a, b, c$ e $d$ ?