III OLIMPÍADA REGIONAL **Nível III**

DE MATEMÁTICA **Ensino Médio**

DE RIBEIRÃO PRETO **Fase de Seleção - 27 de setembro de 2008**

Nome do Aluno (a):____

INSTRUÇÕES

1. A prova pode ser feita a lápis ou caneta (é preferível a caneta).
2. Preencha a ficha de respostas com seu nome, data de nascimento e não esqueça de assiná-lo.
3. A duração da prova é de 4 horas.
4. Não é permitido o uso de instrumentos de desenho, calculadoras ou quaisquer fontes de consulta.
5. Os espaços em branco na prova podem ser usados para rascunho.
6. Ao final da prova, entregue ao professor a ficha de respostas da parte A e a sua resolução da parte B.
7. O gabarito estará disponível no site http://dfm.ffclrp.usp.br/mat/olimpiada/ a partir do dia 30

Parte A

(Cada problema vale 4 pontos)

1. Cada questão tem 5 alternativas de respostas: (A), (B), (C), (D) e (E), e apenas uma delas é correta.
2. Para cada questão marque a alternativa na ficha de respostas, preenchendo o espaço dentro do círculo correspondente.

(A) (B) (C) (D) (E)

3. Marque apenas uma alternativa para cada questão. Atenção: se você marcar mais de uma alternativa, perderá os pontos da questão, mesmo que uma das alternativas seja a correta.

1. Durante as férias, José decide visitar seus avós em Petrópolis. Estando José em Petrópolis, estranhamente, choveu durante 15 dias, mas nunca durante o dia todo. Quando choveu pela manhã, a tarde foi ensolarada. Quando a manhã foi ensolarada, a tarde foi chuvosa. Se durante a estadia de José, 12 manhãs e 13 tardes foram ensolaradas, quanto dias José esteve em Petrópolis?

   (A) 20 (B) 15 (C) 18 (D) 22 (E) 25

2. Uma fábrica tem 800 empregados. O que pode ser afirmado com certeza sobre o número n de empregados que fazem aniversário no mesmo dia?

   (A) $n = 400$ (B) $n = 365$ (C) $n = 366$ (D) $n \geq 2$ (E) $n < 400$

3. Sejam a, b e c as raízes do polinômio:

$$x^3 - 7x^2 + 4x - 1.$$

   Podemos afirmar que:

(A) a, b e c são números inteiros
(B) $a + b + c = 1$
(C) $a + b + c + abc = 8$
(D) abc é múltiplo de 7
(E) Nenhuma das alternativas anteriores é correta

4. Um jogador deseja preencher um tabuleiro de xadrez (de 64 casas) com grãos de feijão. No primeiro passo, ele coloca um grão de feijão na primeira casa, no segundo passo ele coloca dois grãos de feijão na segunda casa, no terceiro passo ele coloca quatro grãos de feijão na terceira casa e assim sucessivamente, dobrando a quantidade de grãos colocados em cada casa a cada passo. Sendo n o número total de grão colocados no tabuleiro de xadrez pode-se dizer que:

   (A) $n < 1.000$ (B) $n < 1.000.000$ (C) $n = 2^{64}$ (D) $n > 10^{10}$ (E) $n < 10^9$

5. Uma progressão aritmética apresenta cinco termos. A soma de todos os termos é 100, e a soma dos três termos maiores é sete vezes a soma dos dois termos menores. Qual é o primeiro e o último termo da progressão?

   (A) $\frac{5}{3}$ e $\frac{427}{3}$ (B) $\frac{10}{6}$ e $\frac{230}{6}$ (C) $\frac{2}{3}$ e $\frac{2^5}{3^5}$ (D) $\frac{1}{3}$ e $\frac{243}{3}$ (E) 5 e 3125

   Este problema pode ser encontrado no papiro *Rhind*, a principal fonte que resume o conhecimento matemático do antigo Egito.

   Dica: Uma progressão aritmética é uma seqüência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo anterior com uma constante r, conhecida como a razão da progressão. Po exemplo

   $$1, 4, 7, 10, 13, ...$$

   apresenta razão $r = 3$. Se o n-ésimo termo da progressão é denotado por a_n, então a progressão é obtida como $a_n = a_1 + (n-1)r$.

6. Quantas soluções, onde x e y são números reais, satisfazem a desigualdade $x^2 + xy + y^2 < 0$?

   (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) infinitas

7. O traço de uma matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$ é definido como sendo a soma dos elementos de sua diagonal principal, isto é traço(A)= $a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$. Considere a matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$ definida por $a_{ij} = i + j$, para $1 \leq i, j \leq n$. Podemos dizer que o traço de A é:

   (A) n (B) $n^2 + n$ (C) 2n (D) n^2 (E) $\frac{n(n+1)}{2}$

8. Para quantos valores do número inteiro n a expressão

$$\sqrt{\frac{25}{2}+\sqrt{\frac{625}{4}-n}}+\sqrt{\frac{25}{2}-\sqrt{\frac{625}{4}-n}}$$

é um número inteiro?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) infinitos (E) Nenhum valor

9. O emir Abdel Azir ficou famoso por vários motivos. Ele teve mais de 39 filhos, incluindo muitos gêmeos. De fato, o historiador Ahmed Aab afirma num dos seus escritos que todos os filhos de emir eram gêmeos duplos, exceto 39; todos eram gêmeos triplos, exceto 39; todos eram gêmeos quádruplos, exceto 39. Quantos foram os filhos do emir?

(A) 47 (B) 51 (C) 65 (D) 71 (E) 78

10. O Daniel e o Bruno estão numa estação à espera de um comboio. Para se entreterem, decidem calcular o comprimento de um comboio de mercadorias que passa pela estação sem alterar a velocidade. Quando a frente do comboio passa por eles (o Daniel e o Bruno estão no mesmo lugar), o Daniel começa a andar no sentido do movimento do comboio e o Bruno começa a andar no sentido oposto. Os dois caminham à mesma velocidade e cada um deles para no momento em que se cruza com o fim do comboio. O Daniel andou 45 metros e o Bruno 30. Qual é o comprimento do comboio?

(A) 50 metros (B) 75 metros (C) 120 metros (D) 180 metros (E) 210 metros

---

Parte B

(Cada problema vale 10 pontos)

Escreva as soluções completas dos dois problemas nas folhas de respostas com sua identificação. Tudo que você escrever será levado em conta na avaliação.

1. Mostrar que para todo número natural n, $n^3 - n$ é divisível por 6.

2. Seja P um ponto no interior de um quadrado, e a, b e c as distâncias do ponto P a três vértices do quadrado. (i) Se a e c são as distâncias a vértices opostos, encontre uma relação entre o comprimento do lado do quadrado e os números a, b e c. (ii) O que ocorre quando $a = b = c$, tente interpretar isto geometricamente.