II OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DE RIBEIRÃO PRETO

Nível III

Ensino Médio

FASE FINAL - 10 de Novembro de 2007

- **Cada questão vale 10 pontos (total de pontos do nível 1 última fase = 40 pontos).**

GABARITO

1. Observemos que se realizamos a composição de duas funções do tipo $ax+b$ obteremos ainda uma função deste tipo (funções do tipo ax+b são chamadas de funções afins). Alem disso, se $f(x) = ax + b$, então $f^{2000}(x) = a^{2000}x + c$, onde c é um número que depende de a e b.

   Temos por tanto o seguinte sistema

   $$a^{2000} = 1$$
   $$c = 0$$

   Disto temos que $a = 1$ ou $a = -1$. Estudemos ambos os casos:

   1) Se $a = 1$, então

   $$f(x) = x + b,\ f(f(x)) = x + 2b, \ldots,\ f^{2000}(x) = x + 2000b,$$

   de onde a condição exigida será satisfeita se $2000b = 0$. Mas precisamente, se $b = 0$. Logo, os valores para a e b são $a = 1$ e $b = 0$. Nesta caso $f(x) = x$

   2) Se $a = -1$, então $f(x) = -x+b$, $f(f(x)) = x$, $f(f(f(x))) = -x+b$, $f(f(f(f(x)))) = x$,...,$f^{2000}(x) = x$ (isto pois 2000 é um número par).

   Assim, qualquer função do tipo $f(x) = -x + b$ (com b qualquer número real) será também uma solução do problema.

2. Um número capicua n de cinco algarismos tem a forma $abcba$. Decompondo teremos

   $$n = 10000a + 1000b + 100c + 10b + a$$
   $$n = 10001a + 1010b + 100c$$
   $$n = (9990a + 11a) + (999b + 11b) + (111c - 11c)$$
   $$n = (9990a + 999b + 111c) + (11a + 11b - 11c)$$
   $$n = 37(270a + 27b + 3c) + 11(a + b - c)$$

Podemo então concluir que n sera múltiplo de 37 se $11(a+b-c)$ é múltiplo de 37. Mas isto só será possível quando $a+b-c=0$, é dizer, quando $a+b=c$. Já que para cada valor de c teremos c possibilidades para a e b, e como c pode tomar valores desde 1 ate 9, o número de soluções é $1+2+3+\ldots+9=45$.

3. Por hipótese temos que

$$(\sharp) \qquad (x,y,z) \text{ é P.A.} \Rightarrow y-x=z-y \Rightarrow y=\frac{x+z}{2}$$

e

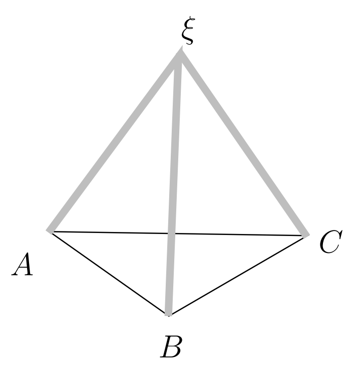
$$(x^2,y^2,z^2) \text{ é P.A.} \Rightarrow y^2-x^2=z^2-y^2 \Rightarrow y^2=\frac{x^2+z^2}{2}.$$

Daí,

$$\frac{x^2+z^2+2xz}{4}=\frac{x^2+z^2}{2} \Rightarrow x^2+z^2+2xz=2x^2+2z^2 \Rightarrow$$
$$x^2-2xz+z^2=0 \Rightarrow (x-z)^2=0 \Rightarrow x=z.$$

Por $(\sharp)$ temos $x=y=z$. Portanto, (x,y,z) é P.G. de razão 1. □

4. Representamos cada pessoa por um ponto. Disporemos os 6 pontos no espaço de tal forma que não fiquem mais de três pontos no mesmo plano. Unimos agora cada par de pontos por um elo. Finalmente colorimos os elos utilizando duas cores, por exemplo cinza e preto, de acordo a se as pessoas se conhecem ou não, isto é, o elo entre a pessoa p_1 e p_2 será representada por uma linha cor cinza se ambas pessoas se conhecem, e será de cor preta se não se conhecerem. Consideremos agora qualquer um dos pontos (pessoas) e chamemos este de ξ. Pelo menos, 3 das 5 linhas que saim de ξ são da mesma cor, por exemplo, cinza (não existe perda de generalidade neste caso). Estes três elos terminam nos pontos A, B, e C (pessoas), veja a figura abaixo.



Se qualquer um dos elos do triângulo ABC é cinza, então claramente existirá um triângulo com vértice ξ da cor cinza, e portanto 3 pessoas mutuamente conhecidas. Caso contrário, todos os elos do triângulo ABC são pretos e neste caso as pessoas A, B, e C não se conhecem.

5. Sim, a seqüência sempre termina em $(0,0,0,0)$. A fim de mostrar isto, denotemos por $\max E_i$, o maior elemento de E_i (assim por exemplo, se $E_i = (1,3,2,5)$, então $\max E_i = 5$). Observamos primeiro que para qualquer inteiro i,

$$\max E_{i+1} \leq \max E_i$$

já que qualquer um dos elementos em E_{i+1} é o valor absoluto da diferença de elementos de E_i e um outro número natural. Observamos em particular que $\max E_{i+1}$ pode ser igual a $\max E_i$, tomemos por exemplo $E_i = (0,1,0,15)$. Agora, se $\max E_i = m > 0$, então ao aplicar T quatro vezes necessariamente temos que

$$\max E_{i+4} < m.$$

Para verificar isto último observamos que no pior dos casos os outros números diferentes de m são 0, mesmo assim, nesta situação temos que

$T(m,0,0,0) = (m,0,0,m)$, $T(m,0,0,m) = (m,0,m,0)$, $T(m,0,m,0) = (m,m,m,m)$, $T(m,m,m,m) = (0,0,0,0)$.

Concluímos desta forma que a seqüência E_i, $i = 0,1,2,\ldots$ esta formada por seqüências decrescentes de números inteiros não negativos, o qual prova a nossa afirmação inicial.