II OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DE RIBEIRÃO PRETO

Nível III

Ensino Médio

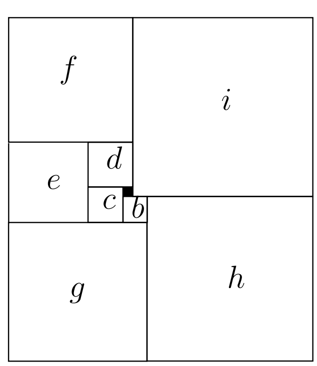
1^a FASE - 01 de setembro de 2007

- **Cada questão da parte A da primeira fase vale 4 pontos e cada questão da parte B vale 10 pontos (total de pontos do nível 1 segunda fase = 60 pontos).**
- **A publicação da Nota de Corte da segunda fase será no dia 17 de setembro no site www.ffclrp.usp.br/dfm. Lembre que 13 de setembro é data limite para o envio do relatório.**

GABARITO PARTE A

No da Questão	Resposta
Questão No 1	A
Questão No 2	A
Questão No 3	C
Questão No 4	B
Questão No 5	anulado
Questão No 6	B
Questão No 7	E
Questão No 8	D
Questão No 9	E
Questão No 10	B

1. Suponhamos que os 9 quadrados são nomeados como é apresentado na seguinte figura, sendo que o menor quadrado em preto corresponde ao quadrado a.



Imediatamente da figura obtemos o seguinte sistema

$$a+b=c \tag{1}$$
$$a+c=d \tag{2}$$
$$c+d=e \tag{3}$$
$$d+e=f \tag{4}$$
$$b+c+e=g \tag{5}$$
$$b+g=h \tag{6}$$
$$a+d+f=i \tag{7}$$

e logo também $f+i=g+h$. Resolvendo as equações (1)-(8) em termos de a e b obtemos $5a=2b$. Porém a é b não apresentam um fator comum então necessariamente $a=2$ e $b=5$, o qual implica $f=25$, $h=33$ e $i=36$. Os lados do retângulo são portanto $i+h=61$ e $f+i=69$, e então o perímetro é 260.

Resposta: (A)

2. Note-se que um número com estas condições pode ser escrito como $(k+3)\times 10^3 + (k+2)\times 10^2 + (k+1)\times 10 + k$ com $k=0,1,2,3,4,5,6$. Por outro lado, se q_k e r_k denotão, respectivamente, o quociente e resto na divisão do número $(k+3)\times 10^3 + (k+2)\times 10^2 + (k+1)\times 10 + k$ por 37, então

$$(k+3)\times 10^3 + (k+2)\times 10^2 + (k+1)\times 10 + k = 37\times q_k + r_k$$

note-se tambem que se consideramos o seguinte número com a propriedade requerida teremos que

$(k+4)\times 10^3+(k+3)\times 10^2+(k+2)\times 10+(k+1) = (k+3)\times 10^3+(k+2)\times 10^2+(k+1)\times 10+k+(10^3+10^2+10+1) = 37\times q_k+r_k+(37\times 30+1) = 37\times(q_k+30)+r_k+1.$

Podemos então afirmar que o quociente na divisao por 37 aumenta em 30 e o resto em uma unidade (desde que $r_k+1<37$).

Usando isto e o fato que $3210 = 37\times 86+28$ (para $k=0$, $q_0=86$ e $r_0=28$) entao, a soma dos restos será: $r_0+r_1+r_2+r_3+r_4+r_5+r_6 = 28+(28+1)+(28+2)+(28+3)+(28+4)+(28+5)+(28+6) = 217$

Resposta: (A)

3. Denotaremos por x a quantidade de alunos e por y a quantidade de assuntos. Daí descrevendo o problema em termos de x e y obtemos:

Fazendo duplas, um aluno ficaria sozinho sem realizar trabalho é descrito por:

$$2y = x-1 \tag{8}$$

Fazendo trios, dois assuntos não seriam trabalhados pela turma toma a forma

$$3(y-2) = x \tag{9}$$

Substituindo (8) em (9) obtemos

$$3(\frac{x-1}{2} - 2) = x \Leftrightarrow 3(x-1-4) = 2x \Leftrightarrow x = 15$$

Resposta: (C)

4. Seja um triângulo retângulo com catetos medindo n e $n+1$, e a hipotenusa com medida $n+2$. Pelo teorema de Pitágoras

$$n^2 + (n+1)^2 = (n+2)^2 \Leftrightarrow n^2 + n^2 + 2n + 1 = n^2 + 4n + 4 \Leftrightarrow n^2 - 2n - 3 = 0$$

   Como $n = 3$ é a única solução positiva, logo existe um único triângulo retângulo com a propriedade exigida, a saber, com lados $3, 4$ e 5.

   Resposta: (B)

5. Por erro de digitação a condição de os lados dos triângulos serem números inteiros (positivos) não foi colocado. Sem esta condição todos os itens são respostas ao problema.

   Solução:

   Denotemos por c o comprimento da hipotenusa e por b o comprimento do outro cateto. Pelo teorema de Pitágoras temos $(13)^2 + b^2 = c^2$. Daí, $c^2 - b^2 = (13)^2 \Rightarrow (c+b)(c-b) = (13)^2$. A única possibilidade para c e b inteiros é

$$\begin{cases} c + b = 169 \\ c - b = 1 \end{cases}.$$

   Disto segue que $2c = 170$ o que implica $c = 85$. Substituindo no sistema temos $b = 84$. Portanto, o perímetro é $P = 13 + 85 + 84 = 182$.

   Por outro lado, observemos que em geral a equação $(c+b)(c-b) = (13)^2$ terá infinitas soluções (com c e b não inteiros), logo para qualquer valor $k > 26$ existirão sempre um triângulo retângulo, com um catateo de comprimento 13, tal que seu perímetro seja k

6. O número de possibilidades de se escolher um goleiro é 2. O número de possibilidades de se escolher 4 dentre 10 jogadores de linha é dado por

$$\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4!}.$$

   Logo, o número de possibilidades de se começar uma partida é

$$2 \times \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{3 \times 4} = 10 \times 3 \times 2 \times 7 = 420.$$

   Resposta: (B)

7. Se $x = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots}}}}}}}$ então $x^2 = 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots}}}}}}} = 2x$.

   Daí, $x^2 - 2x = 0$ o que implica $x = 0$ ou $x = 2$. Evidentemente, $x \neq 0$, pois $\sqrt{2} > 1$. Portanto, $x = 2$.

   Resposta: (E)

8. $a_5 = 35$ implica que $5 \cdot 7 = 35 = a_4(a_3 + a_2)$. Daí, temos duas possibilidades:

   primeira possibilidade: $a_4 = 5$ e $a_3 + a_2 = 7$.

   segunda possibilidade: $a_4 = 7$ e $a_3 + a_2 = 5$.

   Facilmente vemos que a primeira possibilidade não ocorre. De fato, como $a_4 = a_3(a_2 + a_1)$, se tivéssemos $a_4 = 5$ então teríamos duas possibilidades:

   i) $a_3 = 1$ e $a_2 + a_1 = 5$. O que é impossível pois $a_3 + a_2 = 7$.

   ii) $a_3 = 5$ e $a_2 + a_1 = 1$. O que é impossível pois $a_3 + a_2 = 7$.

   Portanto, $a_4 = 7$.

   Resposta: (D)

9. De 1 ao 100 existem 50 números impares que somados aos outros 50 números pares dá um número par. Se for trocado o sinal $+$ por um sinal $-$ no número n, isto é, se trocamos $+n$ por $-n$, em realidade estaremos substraindo $2n$ a K. Mas K e $2n$ são números pares, logo $K - 2n$ será sempre um número par. Podemos então concluir que nunca será possivel obter 1991 do modo solicitado.

   Resposta: (E)

10. Queremos n inteiro positivo tal que

$$\frac{3n^2 + 9n + 86}{5n + 10} = k, \quad \text{para algum inteiro positivo } k.$$

   Da igualdade acima temos $3n^2 + 9n + 86 = k5(n+2)$; simplificando o primeiro membro desta igualdade temos $(3n+3)(n+2) + 80 = k5(n+2)$. Como $n+2$ divide $(3n+3)(n+2)$, temos, pela última igualdade, que $n+2$ divide $80 = 5 \cdot 2^4$. Assim, os possíveis valores de $n+2$ são

$$1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40 \text{ e } 80$$

   e, consequentemente, os possíveis valores para n são

$$-1, 0, 2, 3, 6, 8, 14, 18, 38 \text{ e } 78.$$

   Porém, os únicos valores positivos de n, dentre os encontrados acima, tais que $\dfrac{3n^2 + 9n + 86}{5n + 10}$ é um inteiro, são $n = 8$ e $n = 14$.

   Resposta: (B)

GABARITO PARTE B

1. Suponha que as cartas dispostas da esquerda para a direita sejam A, B e C. Bruno, Daniel e João Pedro sabem que:

   (a) $A + B + C = 13$

   (b) $A < B < C$

   (c) $A \neq B \neq C \neq A$

   Consequentemente, sabem que $A \leq 3$, $2 \leq B \leq 5$ e C é diferente de 11, 12 e 13.

   Pela resposta de Bruno, Daniel e João Pedro sabem que $A \neq 3$ pois caso contrário Bruno saberia que $B = 4$ e $C = 6$. Logo, $A \leq 2$.

   Por outro lado, pela resposta de Daniel, João Pedro sabe que $C \neq 9$ e $C \neq 10$ pois caso contrário Daniel saberia que $A = 1$ e $B = 3$ ou $A = 1$ e $B = 2$.

   Logo, João Pedro sabe que

   - $1 \leq A \leq 2$
   - $C \leq 8$
   - $3 \leq B \leq 5$; note que $B \neq 2$, pois $C \leq 8$

   Como João Pedro não responde temos que

   - $B \neq 5$ pois caso contrário João Pedro saberia que $A = 1$ e $C = 7$
   - $B \neq 3$ pois caso contrário João Pedro saberia que $A = 2$ e $C = 8$

   Portanto, $B = 4$. Note que tal número não permite João Pedro saber quais os números das outras duas cartas pois existem as seguintes possibilidades: $A = 2$, $B = 4$ e $C = 7$ ou $A = 1$, $B = 4$ e $C = 8$.

   Critério de Correção:
   (i) Se o aluno descrever o sistema (a), (b), (c) - 1 ponto.

   (ii) Se o aluno encontrar que $A \leq 3$, $2 \leq B \leq 5$ e C é diferente de 11, 12 e 13 - 2 pontos.

   (iii) Se o aluno descobrir que $A \leq 2$ - 2 pontos

   (iv) Se o aluno descobrir $C \leq 8$ - 2 pontos

   (v) Se o alunos descobrir $B \neq 2$ - 1 ponto

   (v) Se o aluno mostrar que $B = 4$ verificando que $B \neq 3$ e $B \neq 5$ - 2 pontos.

   OBS: Qualquer solução correta na qual o aluno faça uso de lógica deve ser considerada. Pedimos que a divisão da pontuação seja feita de maneira similar ao dado acima. Contamos com o bom senso dos professores.

2. É facil notar que os anos capicuas a serem considerados são os de 2 e 3 algarismos (isto pois se considerarmos anos capicuas de 4 algarismos a distância mínima será de 110, por exemplo nos anos 3113 e 3223). Sendo assim podemos dizer que:

   A diferência mínima de anos capicuas de 3 algarismos será de 10 anos (como de 313 para 323), e no máximo acontecerá 10 vezes seguindas (como de 707 ao 797);

   A diferência entre anos capicuas de 2 algarismos mais prôximos será 11 (como de 55 para 66);

   Ao passar de 2 a 3 algarismos ou de 3 a 4, poderemos encontrar anos capicuas com diferência de 2 anos (como de 99 para 101 ou de 999 para 1001).

   Considerando todas estas observações podemos conferir que existem 3 possibilidades para o ano de nascimento do homem, sendo que todas elas producem a mesma edade mínima: 104 anos. As possibilidades de anos onde o homem pode ter nascido são: de 88 a 191, de 99 a 202 e de 898 a 1001.

   Critério de Correção:
   (i) Se o aluno conseguiu notar que os anos a serem considerados são os de 2 e 3 algarismos então deverá ganhar 2 pontos.
   (ii) Se o aluno faz um analise correta (como acima) dos anos capicuas, mas sem chegar a uma resposta concreta, poderá ganhar até 3 pontos.

   (iii) Se o aluno dá a resposta correta sem justificar, ganhará só 5 pontos