II OLIMPÍADA REGIONAL
DE MATEMÁTICA
DE RIBEIRÃO PRETO

Nível II

7^a e 8^a séries do Ensino Fundamental

FASE FINAL - 10 de Novembro de 2007

- **Cada questão vale 10 pontos (total de pontos do nível 1 última fase = 50 pontos).**

GABARITO

1. Como Jairzinho considerou que $abc - defg = -95$, então

$$abc + 95 = defg$$

Para que esta soma (um número de 3 algarismos com um número de 2 algarismos) seja um número de 4 algarismos deverá cumprir necessariamente que: $a = 9$, $d = 1$ e $e = 0$.

Observando a soma na casa das dezenas obtemos as seguintes opções

$$1 + b + 9 = 10 + f$$
$$b + 9 = 10 + f$$

isto dependerá se a soma das unidades, $c + 5$, é maior que 10 ou não. A primeira opção não pode ser válida já que b e f tem que ser distintos. Assim, necessariamente $b = f + 1$ e, então, a soma $c + 5$ não poderá ser maior que 10. Mas este último só será possível se c for igual a 2 ou 3 (isto evitará repetir algarismos).

Já que é pedido o menor valor possível de abc, sabendo agora que b e f são algarismos consecutivos, deveremos tomar os valores de b e f como sendo os algarismos 4 e 3 respectivamente (os três algarismos menores serão tomados por d, e e c). Deste modo concluímos que:

$$abc = 942$$
$$defg = 1037.$$

Por outro lado, se supormos que $d = 0$ (e portanto o número $defg$ seria o número efg de 3 algarismos) então uma análise similar nos leva a provar que, sob esta suposição, o menor valor possível para abc é 153 (e portanto o número telefônico seria $abc - defg = 153 - 0248$).

2. Seja x o número de bombons que Daniel ganhou e y o de bombons que Bruno ganhou. Temos
$$x + y = 200, \quad x < 100 \quad \text{e} \quad x > \frac{4}{5}y.$$
Daí,
$$y \geq 100 \quad \text{e} \quad x > 80$$
e, conseqüentemente, $80 < x < 100$. Como x é múltiplo de 8 temos duas possibilidades: $x = 88$ ou $x = 96$. Não poderíamos ter $x = 88$, pois caso contrário teríamos $y = 112$ o que implicaria $x > 4/5 \times 112 = 89,5$ (absurdo). Logo, $x = 96$. Daí, $y = 104$. Note que $x > 4/5 \times 104 = 83,2$.

3. Sejam
$$\begin{array}{lcl} x & = & \text{número de dias necessarios para leer o livro} \\ x-3 & = & \text{número de dias menos o de atraso} \\ a & = & \text{número de páginas que seriam lidas inicialmente} \\ a+7 & = & \text{número de páginas que foram lidas} \end{array}$$
Temos
$$(\star) \qquad ax = 252 \Rightarrow a = \frac{252}{x}$$
e
$$(\star\star) \qquad (x-3)(a+7) = 252.$$
Logo, por $(\star)$ e $(\star\star)$ temos $ax = ax - 3a + 7x - 21$ ou $3a = 7x - 21$ o que nos dá $7x^2 - 21x - 756 = 0$, ou simplesmente, $x^2 - 3x - 108 = 0$. Resolvendo a equação temos que $x = 12$ (a outra solução é um número negativo) e portanto, $a = 21$. Conseqüentemente, João leu $a + 7 = 21 + 7 = 28$ páginas por dia, durante $x - 3 = 12 - 3 = 9$ dias.

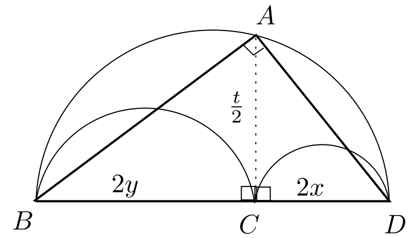
4. Denotemos por x o número de estudantes que simultaneamente ingerem algum tipo de bebida alcoólica e praticam atividades físicas. Logo, o número de estudantes que somente praticam atividades físicas é $50 - x$, enquanto $30 - x$ é o número de estudantes que ingerem somente bebidas alcoólicas. Daí
$$(30 - x) + (50 - x) = 24.$$
Segue então que:

$x = 28$ estudantes ingerem algum tipo de bebida alcóolica e praticam atívides físicas,

somente $50 - 28 = 22$ estudantes praticam atividades físicas, e

somente $30 - 28 = 2$ estudantes ingerem bebidas alcóolicas.

Podemos então afirmar que $28 + 22 + 2 = 52$ é o número de estudantes que ingerem algum tipo de bebida alcoólica e praticam atividades físicas. Portanto, o número de estudantes que não ingerem bebidas alcoólicas e nem praticam atividades físicas é $80 - 52 = 28$.



5. Seja S a área em questão, e x e y os raios dos menores círculos. Temos imediatamente que,

$$S = \pi r^2 - \pi x^2 - \pi y^2, \qquad 2r = 2x + 2y,$$

isto é, duas equações e três incógnitas S, x e y. Utilizando a dica e a última destas equações temos

$$(x+y)^2 = r^2, \quad 2xy = \frac{t^2}{8}$$

Se desenvolvemos $(x+y)^2$ na primeira equação e combinamos o resultado com a segunda obtemos $-x^2 - y^2 + r^2 = t^2/8$. Este último resultado, quando combinado com a primeira equação para S, resulta finalmente em

$$S = \frac{\pi t^2}{8},$$

o qual é a resposta da pergunta.

Mostramos agora a identidade $(t/2)^2 = 2x \cdot 2y$, sugerida no enunciado da pergunta. Não é necessário que o aluno tenha mostrado esta relação. Considere o triângulo ABD apresentado na figura 5. Utilizando Pitágoras vemos que as hipotenusas dos triângulos ABC e ACD são respectivamente $\sqrt{(t/2)^2 + (2y)^2}$ e $\sqrt{(t/2)^2 + (2x)^2}$. Utilizando Pitágoras novamente sobre o triângulo ABD temos que

$$\left(\frac{t}{2}\right)^2 + (2y)^2 + \left(\frac{t}{2}\right)^2 + (2x)^2 = (2y + 2x)^2.$$

O resultado é obtido ao desenvolver $(2y + 2x)^2$.