II OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DE RIBEIRÃO PRETO

Nível II

7^a e 8^a séries do Ensino Fundamental

1^a FASE - 01 de setembro de 2007

- **Cada questão da parte A da primeira fase vale 4 pontos e cada questão da parte B vale 10 pontos (total de pontos do nível 1 segunda fase = 60 pontos).**
- **A publicação da Nota de Corte da segunda fase será no dia 17 de setembro no site www.ffclrp.usp.br/dfm. Lembre que 13 de setembro é data limite para o envio do relatório.**

GABARITO PARTE A

No da Questão	Resposta
Questão No 1	anulada
Questão No 2	B
Questão No 3	C
Questão No 4	anulada
Questão No 5	C
Questão No 6	C
Questão No 7	E
Questão No 8	anulada
Questão No 9	A
Questão No 10	C

1. Por um erro de digitação $(11-m)(11-n)(11-p)(11-q)(11-r)(11-s) = -36$ foi colocada como $(11-m)(11-n)(11-p)(11-q)(11-r)(11-s) = 36$. Esta questão esta anulada. Todos os alunos deverão ganhar 4 pontos.

   Solução da questão:

   $-36 = (-1)\cdot 1\cdot(-2)\cdot 2\cdot(-3)\cdot 3$. Como é pedido a soma dos números podemos considerar $11-m=-1 \Rightarrow m=12$, $11-n=1 \Rightarrow n=10$, $11-p=-2 \Rightarrow p=13$, $11-q=2 \Rightarrow q=9$, $11-r=-3 \Rightarrow r=14$ e $11-s=3 \Rightarrow s=8$. Portanto, $m+n+p+q+r+s=66$.

2. Consideremos $s=$ salário e $h=$ horas extras. Temos:

$$\begin{cases} s+h=680 \\ s-h=300 \end{cases}.$$

Daí, $2s = 980$ e, portanto, $s = 490$.

Resposta: (B)

3. Todo número impar multiplicado por 5 dá como resultado um número cujo último algarismo tambem é o número 5. Como o produto de números impares é um número impar, então o referido produto terá como último algaritmo o número 5.

   Resposta: (C)

4. Por erro de digitação a condição de os lados dos triângulos serem números inteiros (positivos) não foi colocado. Sem esta condição todos os itens são respostas ao problema. Esta questão deverá ser anulada e todos os alunos deverão ganhar 04 pontos.

   Solução:

   Denotemos por c o comprimento da hipotenusa e por b o comprimento do outro cateto. Pelo teorema de Pitágoras temos $(13)^2 + b^2 = c^2$. Daí, $c^2 - b^2 = (13)^2 \Rightarrow (c+b)(c-b) = (13)^2$. A única possibilidade para c e b inteiros é

$$\begin{cases} c + b = 169 \\ c - b = 1 \end{cases} .$$

   Disto segue que $2c = 170$ o que implica $c = 85$. Substituindo no sistema temos $b = 84$. Portanto, o perímetro é $P = 13 + 85 + 84 = 182$.

   Por outro lado, observemos que em geral a equação $(c+b)(c-b) = (13)^2$ terá infinitas soluções (com c e b não inteiros), logo para qualquer valor $k > 26$ existirão sempre um triângulo retângulo, com um catateo de comprimento 13, tal que seu perímetro seja k

5. Fatorando as quantidades de mel em fatores primos obtemos:

$$120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

$$315 = 3^2 \times 5 \times 7$$

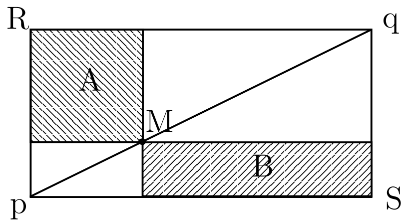
$$630 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7$$

   Daí obtemos que o maior divisor comum (MDC) destes três números é o 15, logo esta deve ser a capacidade dos potes.

   Resposta: (C)

6. Como em qualquer retângulo a área do triângulo acima da diagonal é sempre igual à área do triângulo abaixo da diagonal, então na figura a área do triângulo pRq será igual à área do triângulo pSq, a área dos triângulos com aresta comum $\overline{pM}$ serão iguais, e a área do triângulo com aresta comum $\overline{Mq}$ serão tambem iguais. Segue de esta argumentação que a área de A será sempre igual à área de B independente do ponto M na diagonal.

   Resposta: (C)



7. Nesse problema podemos adotar a técnica de excluir as alternativas incorretas. É fácil ver que:

   $P_2 = 3$ logo a alternativa (A) é falsa.

   $P_3 = 6$ logo a alternativa (D) é falsa.

   $P_4 = 10$, logo (B) é falsa, sendo que para esse caso (E) vale.

   $P_5 = 15$ logo a alternativa (C) é falsa.

   Portanto, como verificamos que todas as alternativas são falsas com excessão da (E), e sendo hipótese do exercício que uma alternativa é verdadeira, segue que (E) é verdadeira. De fato podemos verificar que $P_{4k} = \frac{4k(4k+1)}{2} = 2k(4k+1)$, para todo natural k, que é um número par.

   Resposta: (E)

8. Por um erro de digitação a alternativa correta não foi colocada. Esta questão deverá ser anulada e todos os alunos deverão ganhar 04 pontos.

   Solução da questão:

   Denotando por x a quantidade de indivíduos na cidade, o número de estudantes é $\frac{65}{100}x$. Como 60% estudam durante o dia, logo 40% de $\frac{65}{100}x$ estudam a noite, isto é, $\frac{40}{100}\frac{65}{100}x = \frac{260}{1000}x = \frac{26}{100}x$. Concluímos que 26% da população estuda a noite.

9. Os números cujos algarismos somam 6 são necessariamente multiplos de 3 e por tanto nao poderão ser números primos. Logo os itens (A) e (E) estão em contradição um com outro, por tanto um de eles é falso e os itens (B), (C) e (D) deverão ser verdadeiros. Os números entre 40 e 110 que tem dois algarismos iguais são 44, 55, 66, 77, 88, 99, 100 e 101. A soma das cifras de nenhum deles é 6. Mas 101 é um número primo, logo podemos concluir que 101 é o número da casa de Ronaldinho e a afirmação falsa é a indicada no item (A).

   Resposta: (A)

10. A distância entre os relogios cresce a uma razão de 1,5 minutos por hora. Para chegar a 60 minutos, terá que passar 40 horas.

    Resposta: (C)

GABARITO PARTE B

1. Parte (i). A soma dos números é 2 + 3 +4 + 5 + 7 = 21. Se $B+C+D = A+C+E$, isto implica que
$$A + E = B + D < \frac{21}{2},$$
e desta forma eliminamos de imediato as seguintes opções para os pares de números em $\{A, E\}$ ou em $\{B, D\}$,
$$\{4, 7\} \text{ e } \{5, 7\}.$$
Notamos agora que só existe uma maneira de que a soma de dois dos números resulte em 5, em 6, em 8, ou em 10 e portanto descartamos respectivamente a possibilidade de colocar os seguintes pares de números nos extremos,
$$\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}, \text{ e } \{3, 7\}.$$
Por inspeção de todas as possibilidades, desta forma só podemos colocar nos extremos os seguintes dos pares de números com a mesma soma
$$\{5, 2\}, \text{ e } \{3, 4\}$$
$$\{7, 2\}, \text{ e } \{5, 4\}$$
e nesta caso temos que $C = 7$ ou $C = 3$.

   Parte (ii). Da resposta a primeira parte sabemos que $C = 7$ ou $C = 3$. Para o caso $C = 7$, temos 4 posições para colocar o número 5 e então o 2, porém para cada uma destas escolas temos duas formas colocar o outro par de números $\{3, 4\}$. Temos então para este caso 8 possíveis formas de colocar os números em A, E, B, D. Estas são apresentadas no seguinte desenho.

$$\begin{array}{ccc} & 5 & \\ 3 & \mathbf{7} & 4 \\ & 2 & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & 3 & \\ 2 & \mathbf{7} & 5 \\ & 4 & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & 2 & \\ 4 & \mathbf{7} & 3 \\ & 5 & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & 4 & \\ 5 & \mathbf{7} & 2 \\ & 3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & 5 & \\ 4 & \mathbf{7} & 3 \\ & 2 & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & 4 & \\ 2 & \mathbf{7} & 5 \\ & 3 & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & 2 & \\ 3 & \mathbf{7} & 4 \\ & 5 & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & 3 & \\ 5 & \mathbf{7} & 2 \\ & 4 & \end{array}$$

   Analogamente para o caso $C = 3$ temos 8 possibilidade e desta forma finalmente a resposta é 16.

   Critério de Correção:
   A parte (i) vale 6 pontos e a parte (ii) 4 pontos (ambas devidamente justificadas). Se o aluno indicar os valores possiveis sem justificar, deverá ganhar até no máximo 3 pontos no item (i) e 2 pontos no item (ii).

2. Denotemos o local onde se deverá construir a escola por X. Se $\overline{AX}$, $\overline{BX}$ e $\overline{CX}$ denota a distância de percurso realizado por cada criança da cidade A, B e C

respectivamente ate o local da escola X, então num dia de aula o percurso total realizado por todas as crianças será:

$$10\overline{AX} + 20\overline{BX} + 30\overline{CX}$$

Por outro lado, o percurso total que as crianças de A fariam ao ir para C mais o percurso total que as criaças de B fariam ao ir para C é

$$10\overline{AC} + 20\overline{BC}.$$

Como

$$10\overline{AC} + 20\overline{BC} \leq 10\overline{AX} + 10\overline{XC} + 20\overline{BX} + 20\overline{XC} = 10\overline{AX} + 20\overline{BX} + 30\overline{CX}$$

então podemos dizer que se for procurado o ponto X tal que o percurso total seja o minimo, então necessariamente $X = C$, isto é, a escola terá que ser construida na cidade C para conseguir a condição exigida.

Critério de Correção:
(i) Se o aluno conseguiu indentificar a cidade C como a resposta mas nao justificou deverá ganhar só 4 pontos.
(ii) Se o aluno faz uma analise comparativa dos percursos realizados entre as cidades e conclui a resposta correta mas não foi considerada a possibilidade de que a cidade esteja num ponto distinto de A, B e C, deverá ganhar só 5 pontos
(iii) O aluno só ganhara os 10 pontos se chegar à resposta certa justificando o por que a escola não pode ser construida num ponto distinto de A, B ou C