II OLIMPÍADA REGIONAL	# Nível I
DE MATEMÁTICA	**5^a e 6^a séries do Ensino Fundamental**
DE RIBEIRÃO PRETO	**FASE FINAL - 10 de Novembro de 2007**

- **Cada questão vale 10 pontos (total de pontos do nível 1 última fase = 50 pontos).**

GABARITO

1. Como não aparece o número ab nos produtos parciais (todos eles tem 3 algarismos) podemos concluir que nem a nem b pode ser o número 1.

   Observando o produto deduzimos que o primeiro algarismo (das unidades) do resultado do produto de a por b tem que ser o b. Logo, temos as seguintes possibilidades: $a = 3$ e $b = 5$, $a = 6$ e $b = 2$, $a = 6$ e $b = 4$, $a = 6$ e $b = 8$, $a = 7$ e $b = 5$, e $a = 9$ e $b = 5$.

   Analisemos cada uma destas possibilidades

   1) Se $a = 3$ e $b = 5$, então teremos que uma possibilidade para os números na multiplicação será

$$\begin{array}{cccc} & & 3 & 5 \\ & \times & 5 & 3 \\ \hline & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 5 & \\ \hline 1 & 8 & 5 & 5 \end{array}$$

   2) Se $a = 6$ e $b = 2$ a multiplicação não segue o formato requerido (os dois últimos algarismos do produto $62 \times 26 = 1612$ não são iguais). Logo esta possibilidade é descartada. Uma analise similar descarta as possibilidades $a = 6$ e $b = 8$, $a = 7$ e $b = 5$, $a = 9$ e $b = 5$. Note-se que $a = b = 5$ ou $a = b = 6$ também não satisfazem o formato requerido.

   3) Se $a = 6$ e $b = 4$ teremos uma outra possibilidade para os números na multiplicação

$$\begin{array}{cccc} & & 6 & 4 \\ & \times & 4 & 6 \\ \hline & 3 & 8 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & \\ \hline 2 & 9 & 4 & 4 \end{array}$$

Temos então como respostas $a = 3$ e $b = 5$ com

$$\begin{array}{cccc} & & 3 & 5 \\ & \times & 5 & 3 \\ \hline & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 5 & \\ \hline 1 & 8 & 5 & 5 \end{array}$$

e, $a = 6$ e $b = 4$ com

$$\begin{array}{cccc} & & 6 & 4 \\ & \times & 4 & 6 \\ \hline & 3 & 8 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & \\ \hline 2 & 9 & 4 & 4 \end{array}$$

2. a) A soma dos números nas duas faces opostas é igual a 7, consequentemente, em cinco dados a soma é 35. Como a soma das faces voltadas para cima é 17, temos que a soma das faces opostas é $35 - 17 = 18$.

   b) Fatorando 36 temos: $36 = 1 \cdot 2^2 \cdot 3^2$. Logo, são três as possibilidades para as faces voltadas para cima:

   1) 1, 6, 6 o que implica que as faces opostas são 6, 1, 1 e, portanto, o produto procurado é 6;

   2) 2, 3, 6 o que implica que as faces opostas são 5, 4, 1 e, portanto, o produto procurado é 20;

   3) 3, 3, 4 o que implica que as faces opostas são 4, 4, 3 e, portanto, o produto procurado é 48.

   Portanto, a Solução é 48.

3. Não é possível, pois apesar de 20 dominós com dimensões $5 \times 3\ cm$ perfazerem uma área de $20 \times 15\ cm = 300cm^2$, não exite um número natural que elevado ao quadrado esteja entre 290 e 300. De fato,

$$17^2 = 289 < 290 < 300 < 324 = 18^2.$$

4. Vamos dividir a resolução em duas etapas.

   Etapa 1: Meses com 30 ou 31 dias

   Nestes casos, temos 10 dias múltiplos de 3 e 6 dias múltiplos de 5. Ainda, 2 dias (15 e 30) são múltiplos de 3 e 5. Portanto, como temos 11 meses no ano nessa classe, obtemos

$$11 \times (10 + 6 - 2) = 154\ dias.$$

   Etapa 2: Mês de fevereiro (a resposta independe de ter havido 28 ou 29 dias)

Neste caso, temos 9 dias múltiplos de 3 e 5 dias múltiplos de 5. Ainda, o dia 15 é múltiplo de 3 e 5. Logo, no mês de fevereiro, Carlos praticou exercícios físicos em $9 + 5 - 1 = 13$ *dias*.

Portanto, 167 é o número total de dias que Carlos praticou exercícios físicos em 2006

5. Consideramos os seguintes n números inteiros

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad \ldots, \quad S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Se qualquer um destes inteiros é divisível por n, então conseguimos responder a afirmação realizada. Caso contrário, todos os restos das divisões

$$\frac{S_1}{n}, \quad \frac{S_2}{n}, \quad \ldots, \quad \frac{S_n}{n}$$

serão diferentes de zero. Dado que unicamente existem $n - 1$ possíveis valores para os restos nas n divisões, então podemos concluir que duas das somas, por exemplo, S_p e S_q, onde $q < p$, apresentam o mesmo resto quando divididas por n. Neste caso, a diferença

$$S_p - S_q = a_{p+1} + \ldots + a_q$$

é divisível por n, mostrando o resultado desejado.

Observe que a resposta não depende da escolha inicial dos números a_1, …, a_n para formar as somas S_1, …, S_n.