III OLIMPÍADA REGIONAL **Nível III**

DE MATEMÁTICA **Ensino Médio**

DE RIBEIRÃO PRETO FASE DE SELEÇÃO - 27 de setembro de 2008

- **Cada questão da parte A vale 4 pontos e cada questão da parte B vale 10 pontos (total de pontos do nível III-fase de seleção = 60 pontos).**
- **Caro Professor, guarde a prova dos seus alunos. Lembre-se que a Comissão Organizadora poderá solicitar em qualquer momento a prova resolvida pelos alunos. Lembre-se também que o dia 13 de outubro é a data limite para o envio do relatório da Fase de Seleção. O referido relatório permitirá à Comissão Organizadora decidir a Nota de Corte para a Fase Final. A publicação da Nota de Corte será disponibilizado no dia 24 de outubro no site oficial do evento http://dfm.ffclrp.usp.br/mat/olimpiada.**

GABARITO PARTE A

No da Questão	Resposta
Questão No 1	A
Questão No 2	D
Questão No 3	C
Questão No 4	D
Questão No 5	B
Questão No 6	A
Questão No 7	B
Questão No 8	B
Questão No 9	B
Questão No 10	D

1. Denotemos por:

   x_1 o número de dias de manhã ensolarada e tarde chuvosa que José passou em Petrópolis;

   y_1 o número de dias de manhã chuvosa e tarde ensolarada que José passou em Petrópolis, e

   x o número de dias sem chuva que José passou em Petrópolis

Segue dos dados do problema que

$$12 = x_1 + x, \quad \text{e} \quad 13 = y_1 + x.$$

Como $x_1 + y_1 = 15$ então, somando membro a membro as duas igualdades anteriores teremos que $25 = 15 + 2x$, isto é, $x = 5$ (note-se que tudo isto é válido por que não houveram dias completamente chuvosos). Concluímos, então, que o número de dias sem chuva foi 5 e, portanto, José esteve em Petrópolis 20 dias (= 15 com chuva + 5 sem chuva).

Resposta: (A)

2. Vamos aplicar o Princípio da Casa dos Pombos. Considere uma casa com 365 quartos numerados de 1 até 365. Distribua os empregados na casa de acordo com as suas datas de nascimento: por exemplo, o empregado que faz aniversário no vigésimo-sexto dia do ano é colocado no quarto de número 26, e assim sucessivamente. Como há 800 empregados e somente 365 quartos, dois ou mais empregados vão ter de compartilhar o mesmo quarto. Isto significa que pelo menos dois empregados fazem aniversário no mesmo dia. Portanto D é a alternativa correta.

   Resposta: (D)

3. Sejam a, b e c as raízes do polinômio dado. Como o coeficiente de x^3 é 1 (isto é, o polinômio é mônico), podemos escrevê-lo na seguinte forma:

   $$(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x - abc.$$

   Comparando os dois polinômios, vemos que $-(a+b+c) = -7$ e $-abc = -1$. Portanto, $a + b + c + abc = 8$.

   Resposta: (C)

4. O número de grãos colocados no tabuleiro é dado pela soma:

   $$n = 1 + 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot (2 \cdot 2) + 2 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) + 2 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) + \ldots + 2 \cdot (\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}_{\text{62 vezes}}).$$

   Portanto $n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \ldots + 2^{63}$.

   Como $2^4 = 16 > 10$ e $2^{63} > 2^{60} = (2^4)^{15}$, temos que:

   $$2^{63} > (2^4)^{15} = 16^{15} = \underbrace{16 \cdot 16 \cdots 16}_{\text{15 vezes}} > \underbrace{16 \cdot 16 \cdots 16}_{\text{10 vezes}} > \underbrace{10 \cdot 10 \cdots 10}_{\text{10 vezes}} = 10^{10}.$$

   Logo $n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \ldots + 2^{63} > 2^{63} > 2^{60} > 10^{10}$.

   Portanto D é a alternativa correta.

   Resposta: (D)

5. Seguindo a dica, uma progressão aritmética de cinco termos é dada por

$$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d,$$

logo desejamos encontrar a (o primeiro termo) e d (a diferença) tal que

$$\begin{aligned} &a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)+(a+4d)=100 \text{ e} \\ &(a+2d)+(a+3d)+(a+4d)=7[a+(a+d)], \end{aligned}$$

isto é,

$$5a+10d=100 \qquad \text{e} \qquad 11a-2d=0.$$

Resolvendo o sistema de duas equações e duas incógnitas, obtemos que $a=5/3$ e $b=55/6$. A progressão é portanto

$$\frac{10}{6}, \frac{65}{6}, \frac{120}{6}, \frac{175}{6}, \frac{230}{6}.$$

.

Resposta: (B)

6. Basta observar que para quaisquer x e y números reais

$$x^2+xy+y^2=x^2+xy+y^2+\frac{y^2}{4}-\frac{y^2}{4}=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}\geq 0.$$

Logo, não existem números reais x e y que resolvam a inequação indicada no problema.

Resposta: (A)

7. Seja $S=1+2+\ldots+n$. Fazendo

$$S=1+2+\ldots(n-1)+n, \text{ e}$$

$$S=n+(n-1)+\ldots 2+1$$

temos que $2S=\underbrace{(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)}_{n \text{ vezes}}$ e, portanto, $S=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Logo, traço(A)$=2+4+\ldots+2n=2(1+2+\ldots+n)=2\times\dfrac{n(n+1)}{2}=n^2+n$.

Resposta: (B)

8. Temos que

$$\left(\sqrt{\frac{25}{2}+\sqrt{\frac{625}{4}-n}}\right)+\left(\sqrt{\frac{25}{2}-\sqrt{\frac{625}{4}-n}}\right)^2=$$

$$=\left(\sqrt{\frac{25}{2}+\sqrt{\frac{625}{4}-n}}\right)^2+2(\sqrt{\frac{25}{2}+\sqrt{\frac{625}{4}-n}})(\sqrt{\frac{25}{2}-\sqrt{\frac{625}{4}-n}})+\left(\sqrt{\frac{25}{2}-\sqrt{\frac{625}{4}-n}}\right)^2$$

$$=\frac{25}{2}+\sqrt{\frac{625}{4}-n}+2\sqrt{(\frac{25}{2}+\sqrt{\frac{625}{4}-n})(\frac{25}{2}-\sqrt{\frac{625}{4}-n})}+\frac{25}{2}-\sqrt{\frac{625}{4}-n}$$

$$=25+2\sqrt{(\frac{25}{2})^2-\left(\sqrt{\frac{625}{4}-n}\right)^2}$$

$$=25+2\sqrt{(\frac{25}{2})^2-(\frac{625}{4}-n)}$$

$$=25+2\sqrt{n}.$$

Então, podemos concluir que se $k=\sqrt{\frac{25}{2}+\sqrt{\frac{625}{4}-n}}+\sqrt{\frac{25}{2}-\sqrt{\frac{625}{4}-n}}$ teremos que

$$k^2=25+2\sqrt{n}$$

de onde

$$n=(\frac{k^2-25}{2})^2. \tag{1}$$

Como procuramos o número de valores para o inteiro n para os quais k é um número inteiro, então necessariamente k terá que ser um número ímpar maior o igual que 5

$$k \geq 5$$

Note que se $k \geq 9$ então (1) implicaria que $n > \frac{625}{4}$ e, portanto, k não seria um número real. Podemos, então, concluir que os possíveis valores para k são 5 e 7, o que nos leva a duas soluções para n, a saber:

$$n = 0 \text{ ou } n = 144.$$

Resposta: (B)

9. Temos que o número de gêmeos duplos é igual ao número de gêmeos triplos que é igual ao número de gêmeos quádruplos, digamos x. Como a quantidade de gêmeos duplos é um múltiplo de 2, a de gêmeos triplos é um múltiplo de 3 e a de gêmeos quádruplos é múltiplo de 4, temos que x é múltiplo de 2, 3 e 4. Logo, x é múltiplo de 12, isto é, os possíveis valores de x são: 12, 24, 36, 48, $\cdots$.

   Chamando de y o número de filhos que não são gêmeos, temos que o total de filhos é dado por $3x + y$.

   Como o total de gêmeos duplos corresponde ao total de filhos menos 39, temos:

$$x = 3x + y - 39 \Rightarrow y = 39 - 2x.$$

   Substituindo os possíveis valores de x na equação acima, é fácil ver que qualquer possível x maior do que 12 nos dá um valor negativo para y, o que não é permitido, pois $y \geq 0$. Portanto, $y = 39 - 2 \times 12 = 15$ e o total de filhos é $3 \times 12 + 15 = 51$.

   Resposta: (B)

10. Daniel andou $45 - 30 = 15$ metros a mais que Bruno e, no período de tempo que Daniel demorou a percorrer esses 15 metros, o comboio andou $45 + 30 = 75$ metros. Portanto, no mesmo período de tempo, o comboio percorre $\frac{75}{15} = 5$ vezes mais metros de que cada um deles. Assim, enquanto Bruno andou 30 metros, o comboio andou $30 \times 5 = 150$ metros. Como Bruno começou a andar quando foi passado pela frente do comboio, parou quando se cruzou com o fim do comboio e andou 30 metros no sentido oposto, então o comboio tem $150 + 30 = 180$ metros de comprimento.

   Resposta: (D)

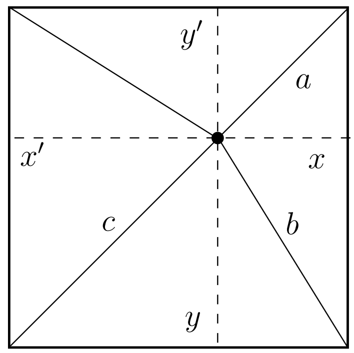
GABARITO PARTE B

1. Fatorando $n^3 - n$, obtemos que $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1) = (n-1)n(n+1)$. Portanto, $n^3 - n$ é produto de três números inteiros consecutivos. Logo, um destes números tem que ser par e, portanto, múltiplo de 2. Por outro lado, os múltiplos de 3 são da forma $0, 3, 6, 9, 12, 15, \ldots$. Assim, entre dois múltiplos de 3 há somente dois números inteiros. Logo, uma seqüência de três números consecutivos sempre contém um múltiplo de 3. Portanto, $n^3 - n$ é múltiplo de 2 e 3, e assim múltiplo de 6.

   Critério de Correção:
   O aluno só ganhará os 10 pontos se a argumentação for completa. Argumentos do tipo: " como é válido para $n = 0, 1, 2, 3$ então é válido para todo n"não deverá ser aceito nem pontuado. Se o aluno provar a afirmação utilizando o Princípio de

Indução Finita, o professor deverá verificar cuidadosamente que o referido princípio foi bem empregado para dar os 10 pontos ao aluno. Caberá ao professor pontuar e penalizar o aluno dependendo do avanço ou erro na utilização do princípio de indução finita.

2. (i) Consideramos a, b, c, x, x', y e y' de acordo com o desenho abaixo.



Pelo Teorema de Pitágoras, temos que

$$a^2 = y'^2 + x^2, \quad b^2 = x^2 + y^2, \quad c^2 = y^2 + x'^2 \quad \text{e} \quad d^2 = x'^2 + y'^2,$$

sendo que

$$x + x' = y + y' = l;$$

l representa o comprimento do lado do quadrado. Consideramos, agora, as três equações com três incógnitas x, y e l,

$$\begin{aligned} x^2 + (l-y)^2 &= a^2 \\ x^2 + y^2 &= b^2 \\ y^2 + (l-x)^2 &= c^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$2ly = l^2 + b^2 - a^2 \quad \text{e} \quad 2lx = l^2 + b^2 - c^2.$$

Logo, se elevamos ao quadrado e somamos estas duas expressões obtemos a seguinte equação quadrática para l^2

$$l^4 - (a^2 + c^2)l^2 + \left[(b^2 - a^2)^2 + (b^2 - c^2)^2\right]/2 = 0.$$

(ii) Se $a = b = c$, então o ponto P esta no centro do quadrado. Neste caso, a equação para l^2 apresenta as raízes: $l^2 = 2a^2$ e $l = 0$. Assim, neste caso $l = a\sqrt{2}$

Critério de Correção:

Se o aluno relaciona o comprimento dos segmentos utilizando o Teorema de Pitágoras como indicado acima, então ganhará 02 pontos. Se o aluno chega a montar o sistema de três equações com três incógnitas, como mostrado acima, então ganhará mais 02 pontos. O aluno ganhará mais 03 pontos se conseguir eliminar as incógnitas para finalmente chegar à equação $P(l) = 0$, sendo $P(l)$ um polinômio de grau 4 na variável l. Se o aluno resolver o item (ii) corretamente, ganhará mais 03 pontos.