GABARITO FASE FINAL

1. Devemos mostrar que se a e b são números inteiros positivos então

$$4(a^3 + b^3) \geq (a + b)^3 \quad (\star).$$

Fatorando $a^3 + b^3$, obtemos:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Assim $(\star)$ é equivalente a:

$$4(a + b)(a^2 - ab + b^2) \geq (a + b)^3.$$

Como $a + b > 0$, ao dividir a inequação acima por $(a + b)$, o sinal da desigualdade é mantido, resultando:

$$4(a^2 - ab + b^2) \geq (a + b)^2,$$

que equivale a:

$$3a^2 - 6ab + 3b^2 \geq 0,$$

isto é, $3(a - b)^2 \geq 0$. Como esta desigualdade é sempre verdadeira e equivale a $(\star)$, temos que $(\star)$ também é verdadeira.

2. Fatorando obtemos:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = 9.$$

Assim,

$$(a + b) \quad \text{e} \qquad a^2 - ab + b^2 = (a + b)^2 - 3ab$$

são divisores de 9. Nestas circunstâncias podemos considerar os seguintes casos

(i) $a+b=1$, $1-3ab=9$	(ii) $a+b=9$, $81-3ab=1$
(iii) $a+b=3$, $9-3ab=3$	(v) $a+b=-3$, $9-3ab=-3$
(iv) $a+b=-1$, $1-3ab=-9$	(v) $a+b=-9$, $81-3ab=-1$

A alternativa (i) implica que $ab=-8/3$, o que contradiz o fato de ab ser inteiro. Pela mesma razão, a alternativa (ii) não ocorre. Para verificar a alternativa (iii), substituindo $a+b=3$ na equação $9-3ab=3$, obtemos $a^2-3a+2=0$, logo $a=1$ e $b=2$, ou $a=2$ e $b=1$. Para a alternativa (iv) temos $a=-(\sqrt{7}i+3)/2$, $b=8/(\sqrt{7}i+3)$ ou $a=\sqrt{7}i-3)/2$, $8/(\sqrt{7}i-3)$; para a alternativa (v) $a=(\sqrt{111}i+3)/6$, $b=-20/(\sqrt{3}\sqrt{37}i+3)$ ou $a=(\sqrt{111}i-3)/6$, $b=20/(\sqrt{3}\sqrt{37}i-3)$ e para (iv) $a=(\sqrt{255}i+27)/6$, $b=-164/(\sqrt{3}\sqrt{5}\sqrt{17}i+27)$ ou $a=(\sqrt{255}i-27)/6$, $b=164/(\sqrt{3}\sqrt{5}\sqrt{17}i-27)$.

Concluímos desta maneira que única alternativa possível é a alternativa (iii).

3. Substituindo as identidades trigonométricas $\cos^2(\theta)=1-\operatorname{sen}^2(\theta)$ e $\operatorname{sen}(\theta/2)\cos(\theta/2)=\frac{1}{2}\operatorname{sen}(\theta)$ na expressão acima, obtemos a equação:

$$\operatorname{sen}^3(\theta)-\operatorname{sen}^2(\theta)+\operatorname{sen}(\theta)-1=0.$$

Assim, $x=\operatorname{sen}(\theta)$ é raiz do polinômio cúbico:

$$x^3-x^2+x-1.$$

Como 1 é raiz deste polinômio, podemos dividí-lo por $x-1$, resultando:

$$x^3-x^2+x-1=(x-1)(x^2+1)=0.$$

Como x^2+1 não tem raiz real (pois o quadrado de um número real sempre é maior ou igual a zero), a única solução solução (real) de $x^3-x^2+x-1=0$ é $x=1$. Portanto, $\operatorname{sen}(\theta)=1$ e $\theta=\frac{\pi}{2}+2n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$, são todas as soluções da equação dada.

4. Sejam

$$\begin{aligned} f(1) &= 2008, && (1)\\ f(1) &+f(2)+\ldots+f(n)=n^2f(n) && (2)\end{aligned}$$

Como (2) vale para todo número inteiro positivo n, ela vale em particular para $n=k$ e $n=k+1$. Assim:

$$\begin{aligned} f(1)+f(2)+\ldots+\quad f(k) &= k^2f(k), && (3)\\ f(1)+f(2)+\ldots+\quad f(k) &+f(k+1)=(k+1)^2f(k+1). && (4)\end{aligned}$$

Substituindo (3) em (4), obtemos:

$$\begin{aligned} k^2 f(k) + f(k+1) &= (k+1)^2 f(k+1), \\ k^2 f(k) &= \big((k+1)^2 - 1\big) f(k+1), \\ k f(k) &= (k+2) f(k+1), \\ f(k+1) &= \frac{k}{k+2} f(k). \end{aligned}$$

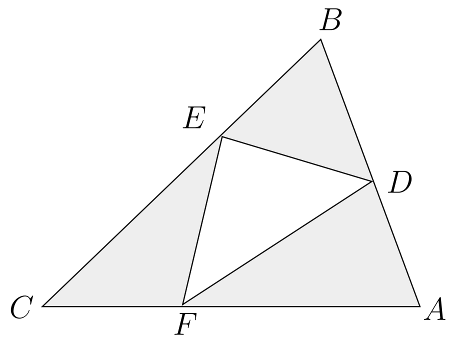
Logo,

$$f(2008) = f(2007+1) = \frac{2007}{2009} f(2007) = \frac{2007}{2009} f(2006+1) = \frac{2007}{2009} \cdot \frac{2006}{2008} f(2006)$$

Por indução,

$$f(2008) = \frac{2007 \cdot 2006 \cdot 2005 \cdot 2004 \cdots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2009 \cdot 2008 \cdot 2007 \cdot 2006 \cdots 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} f(1) = \frac{2007!}{2009!} \frac{2008}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{2009}.$$

5. Considere os triângulos ABC e DEF segundo o desenho abaixo.



Pela Lei do Seno para o cálculo da área de um triângulo, obtemos as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \text{Área}\,(ABC) &= AB \cdot AC \cdot \text{sen}\,(\hat{A}) = BA \cdot BC \cdot \text{sen}\,(\hat{B}) = CA \cdot CB \cdot \text{sen}\,(\hat{C}). \\ \text{Área}\,(ADF) &= AD \cdot AF \cdot \text{sen}\,(\hat{A}). \\ \text{Área}\,(BDE) &= BD \cdot BE \cdot \text{sen}\,(\hat{B}). \\ \text{Área}\,(CEF) &= CE \cdot CF \cdot \text{sen}\,(\hat{C}). \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{\text{Área}\,(ADF)}{\text{Área}\,(ABC)} = \frac{AD \cdot AF \cdot \text{sen}\,(\hat{A})}{AB \cdot AC \cdot \text{sen}\,(\hat{A})} = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{CA - CF}{CA} = \alpha\,(1-\gamma).$$

$$\frac{\text{Área}\,(BDE)}{\text{Área}\,(ABC)} = \frac{BD \cdot BE \cdot \text{sen}\,(\hat{B})}{BA \cdot BC \cdot \text{sen}\,(\hat{B})} = \frac{AB - AD}{AB} \cdot \frac{BE}{BC} = (1-\alpha)\beta.$$

$$\frac{\text{Área}\,(CEF)}{\text{Área}\,(ABC)} = \frac{CE \cdot CF \cdot \text{sen}\,(\hat{C})}{CA \cdot CB \cdot \text{sen}\,(\hat{C})} = \frac{BC - BE}{BC} \cdot \frac{CF}{CA} = (1-\beta)\gamma.$$

Como

$$\frac{\text{Área}\,(DEF)}{\text{Área}\,(ABC)} = \frac{\text{Área}\,(ABC) - \big(\text{Área}\,(ADF) + \text{Área}\,(BDE) + \text{Área}\,(CEF)\big)}{\text{Área}\,(ABC)},$$

segue dos cálculos anteriores que:

$$\begin{aligned}
\frac{\text{Área}\,(DEF)}{\text{Área}\,(ABC)} &= 1 - \alpha(1-\gamma) - (1-\alpha)\beta - (1-\beta)\gamma, \\
\frac{\text{Área}\,(DEF)}{\text{Área}\,(ABC)} &= 1 - (\alpha+\beta+\gamma) + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma).
\end{aligned}$$

Como $(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$, temos que:

$$\frac{\text{Área}\,(DEF)}{\text{Área}\,(ABC)} = 1 - (\alpha+\beta+\gamma) + \frac{1}{2}\big((\alpha+\beta+\gamma)^2 - (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\big)\,.$$

Substituindo os valores dados na expressão acima, obtemos

$$\frac{\text{Área}\,(DEF)}{\text{Área}\,(ABC)} = \frac{16}{45}.$$