III OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DE RIBEIRÃO PRETO

Nível II

8^o e 9^o ano do Ensino Fundamental

FASE DE SELEÇÃO - 27 de setembro de 2008

- **Cada questão da parte A vale 4 pontos e cada questão da parte B vale 10 pontos (total de pontos do nível II-fase de seleção = 60 pontos).**
- **Caro Professor, guarde a prova dos seus alunos. Lembre-se que a Comissão Organizadora poderá solicitar em qualquer momento a prova resolvida pelos alunos. Lembre-se também que o dia 13 de outubro é a data limite para o envio do relatório da Fase de Seleção. O referido relatório permitirá à Comissão Organizadora decidir a Nota de Corte para a Fase Final. A publicação da Nota de Corte será disponibilizado no dia 24 de outubro no site oficial do evento http://dfm.ffclrp.usp.br/mat/olimpiada.**

GABARITO PARTE A

No da Questão	Resposta
Questão No 1	B
Questão No 2	C
Questão No 3	E
Questão No 4	A
Questão No 5	E
Questão No 6	A
Questão No 7	D
Questão No 8	D
Questão No 9	D
Questão No 10	C

1. Em número de questões corretas, 75% das questões de matemática corresponde a 15 questões e 65% das questões de português corresponde a 13 questões. Ainda, 60% da prova corresponde a 30 questões. Logo, ele acertou 2 das 10 questões de informática, o que equivale a 20%.

   Resposta: (B)

2. Realizando as operações necessárias teremos que

$$2x + \frac{x}{2} > 2(10 + x) - \frac{1}{2} \Rightarrow 2x + \frac{x}{2} > 20 + 2x - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} > \frac{39}{2} \Rightarrow x > 39$$

e

$$5x \geq 6(x - 5) - 10 \Rightarrow 5x \geq 6x - 30 - 10 \Rightarrow -x \geq -40 \Rightarrow x \leq 40.$$

Portanto, $x = 40$ é o número de mísseis.

Resposta: (C)

3. Cada embalagem deve conter o número de queijos igual ao máximo divisor comum entre 350, 1050 e 1260, isto é, $mdc\{350, 1050, 1260\} = 70$ queijos.

Resposta: (E)

4. Basta observar que para qualquer x e y números reais

$$x^2 + xy + y^2 = x^2 + xy + y^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{y^2}{4} = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} \geq 0.$$

Logo, não existem números reais x e y que resolvam a inequação indicada no problema.

Resposta: (A)

5. Como foram dados quatro dos cinco algarismos que compõem o código, tudo o que temos a fazer é "contar"a quantidade de maneiras de preencher o algarismo que falta. Temos dois casos distintos:

caso 1: o algarismo que falta no código é diferente de 1, 2, 7 e 9.

Neste caso, para completar o código, são seis os algarismos que podemos usar: 0, 3, 4, 5, 6 ou 8; assim, existem 6 possibilidades. Além disso, teremos um código com cinco algarismos distintos; dados cinco algarismos distintos, o número de códigos formados é $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Portanto, o número códigos com cinco algarismos distintos é $6 \times 120 = 720$.

caso 2: o algarismo que falta no código é igual a 1, 2, 7 ou 9.

Neste caso, teremos um código com exatamente dois algarismos iguais; são 4 as possibilidades de um algarismo ser repetido.

Por outro lado, o número de permutações de cinco algarimos, em que um deles aparece duas vezes e os demais uma única vez, é $\frac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$.

Portanto, o número de códigos, neste caso 2, é $4 \times 60 = 240$.

Finalmente, pelos casos 1 e 2, o número total de códigos é $720 + 240 = 960$.

Resposta: (E)

6. Denotemos por:

   x_1 o número de dias de manhã ensolarada e tarde chuvosa que José passou em Petrópolis;

   y_1 o número de dias de manhã chuvosa e tarde ensolarada que José passou em Petrópolis, e

   x o número de dias sem chuva que José passou em Petrópolis

   Segue dos dados do problema que

$$12 = x_1 + x, \quad \text{e} \quad 13 = y_1 + x.$$

   Como $x_1 + y_1 = 15$ então, somando membro a membro as duas igualdades anteriores teremos que $25 = 15 + 2x$, isto é, $x = 5$ (observe que nesta análise foi considerado que não houveram dias completamente chuvosos). Concluímos, então, que o número de dias sem chuva foi 5 e, portanto, José esteve em Petrópolis 20 dias (= 15 com chuva + 5 sem chuva).

   Resposta: (A)

7. De

$$\begin{array}{r} 2A4 \\ +329 \\ ---- \\ 5B3 \end{array}$$

   podemos concluir que $1 + A + 2 = B$. Assim,

$$A + 3 = B.$$

   Por outro lado, como o número $5B3$ é divisível por 3 (condição no problema), então $5 + B + 3$ tem que ser múltiplo de 3. Mas agora sabemos que $A + 3 = B$, logo, a afirmação anterior é equivalente a dizer que $5 + (A + 3) + 3$ tem que ser múltiplo de 3. Isto é, $11 + A$ tem que ser múltiplo de 3. Como A e B são números de um único algarismo, necessariamente

$$A = 1 \quad \text{ou} \quad A = 4.$$

Note-se que $A = 7$ não é solução pois isto implicaria que $B = 10$ (dois algarismos).

Resposta: (D)

8. Vamos aplicar o Princípio da Casa dos Pombos. Considere uma casa com 365 quartos numerados de 1 até 365. Distribua os empregados na casa de acordo com as suas datas de nascimento: por exemplo, o empregado que faz aniversário no vigésimo-sexto dia do ano é colocado no quarto de número 26, e assim sucessivamente. Como há 800 empregados e somente 365 quartos, dois ou mais empregados vão ter de compartilhar o mesmo quarto. Isto significa que pelo menos dois empregados fazem aniversário no mesmo dia. Portanto D é a alternativa correta.

   Resposta: (D)

9. Daniel andou $45 - 30 = 15$ metros a mais que Bruno e, no período de tempo que Daniel demorou a percorrer esses 15 metros, o comboio andou $45 + 30 = 75$ metros. Portanto, no mesmo período de tempo, o comboio percorre $\frac{75}{15} = 5$ vezes mais metros de que cada um deles. Assim, enquanto Bruno andou 30 metros, o comboio andou $30 \times 5 = 150$ metros. Como Bruno começou a andar quando foi passado pela frente do comboio, parou quando se cruzou com o fim do comboio e andou 30 metros no sentido oposto, então o comboio tem $150 + 30 = 180$ metros de comprimento.

   Resposta: (D)

10. Temos que $154 = 2 \times 7 \times 11$. Logo, as possíveis dimensões (em número de azulejos) do fundo da piscina são: 1×154, 2×77, 7×22 e 11×14. Sabemos, ainda, que o perímetro (em número de azulejos) do fundo da piscina divide 650. Como os possíveis perímetros são: $2 \times (1 + 154) = 310$, $2 \times (2 + 77) = 158$, $2 \times (7 + 22) = 58$ e $2 \times (11 + 14) = 50$, vemos que a única possibilidade para a dimensão do fundo da piscina é 11×14 e, conseqüentemente, a profundidade é $\frac{650}{50} = 13$.

    Resposta: (C)

GABARITO PARTE B

1. Se b corresponde ao número de blusas e c ao número de calças, então $15b+65c = 300$. Logo, vamos determinar as soluções inteiras da equação

$$15b + 65c = 300 \Leftrightarrow 3b + 13c = 60 \Leftrightarrow b = \frac{60 - 13c}{3}$$

   Logo, $c = 0$ e $c = 3$ são as únicas soluções, que correspondem a $b = 20, 7$ respectivamente.

Critério de Correção:
Se o aluno formalizar a equação ganhará 02 pontos. Se o aluno perceber que encontrando soluções inteiras o problema está resolvido, ganhará mais 03 pontos. Se o aluno encontrar uma solução dando valores e não fizer nenhum tipo de análise que justifique a não existência de uma outra solução, só ganhará mais 02 pontos. Só se fizer a justificativa ou resolver de modo adequado ganhará os restantes 05 pontos.

2. Seja $abcd$ o número procurado. Da condição do problema podemos afirmar que:

$$a = 3c, \quad \text{e} \quad a + b + c + d = 27.$$

Como os algarismos a, b, c e d são menores ou iguais que 9 e d é ímpar podemos concluir que

$$c \in \{0, 1, 2, 3\}, \text{ e } d \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

assim

$$\begin{gathered} 4c + b + d = 27, \\ c \in \{0, 1, 2, 3\}, \text{e} \\ d \in \{1, 3, 5, 7, 9\} \end{gathered}$$

como $c \in \{0, 1, 2, 3\}$, então $b + d \in \{27, 23, 19, 15\}$. Mas $b, d \leq 9$, logo

$$b + d = 15.$$

Esta última equação em $4c + b + d = 27$ implica que $c = 3$ e $a = 9$. De onde $d \in \{1, 5, 7\}$ (os algarismos são distintos). Como $d = 1$ e $d = 5$ implicaria que b é um número de 2 algarismos, então necessariamente $d = 7$ e portanto $b = 8$. Conclusão, o número procurado é 9837

Critério de Correção:
Se o aluno indicou a resposta sem argumentar, só ganhará 05 pontos.

Se o aluno só formalizar as duas primeiras equações mostradas acima, ganhará 02 pontos.

Se o raciocínio do aluno segue uma análise igual ou parecida ao gabarito, mas não completa a resolução, ganhará no máximo 04 pontos. Por outro lado, se a resolução do aluno consiste em dar valores para os algarismos e tenta encontrar o número sem nenhuma análise adequada, só ganhará os 10 pontos se, e somente se, justificar o porquê não existe nenhum outro número satisfazendo a condição do problema. Caso contrário, só ganhará 08 pontos.