**III OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DE RIBEIRÃO PRETO**

# Nível II

**$8^o$ e $9^o$ ano do Ensino Fundamental**

**FASE FINAL - 29 de Novembro de 2008**

## GABARITO FASE FINAL

1. Denote por $x$ o número de filhos e por $y$ o número de filhas. Nessa notação, dizer que cada filho tem o dobro de irmãs que de irmãos é equivalente à

$$2(x-1)=y. \tag{1}$$

Ainda, dizer que cada filha tem duas irmãs a mais que irmãos é equivalente à

$$y-1=x+2 \tag{2}$$

Isolando $y$ em (2) obtemos $y=x+3$. Substituindo em (1) obtemos

$$2(x-1)=x+3 \Rightarrow x=5.$$

Segue que $y=8$. Portanto, o casal tem 5 filhos e 8 filhas.

2. Denotemos por $ab$ o resultado da multiplicação $n\times 9$ (note-se que $n\in\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$ e portanto, $n\times 9$ é um número de 2 algarismos).

Como $ab=a\times 10+b,$ e $n\times 9=ab$, então

$$n\times 9-a\times 10-b=0$$

Fazendo algumas operações algébricas a igualdade anterior podes ser escrita como:

$$(n-a)\times 10-(n+b)=0$$

o que implica que $n+b\geq 10$ necessariamente. Seja $k\geq 0$ tal que $n+b=10+k$ (claramente $k\leq 8$). Isto na igualdade anterior implicará que

$$(n-a-1)\times 10-k=0$$

De onde podemos concluir que $n-a-1=0$ e $k=n+b-10=0$. Isto é

$$a=n-1 \quad \text{e} \quad b=10-n$$

3. Sejam $a, b$ e $c$ os respectivos lados, com $c$ sendo a hipotenusa. Temos que:

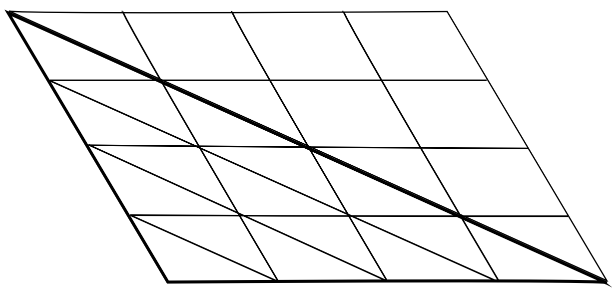
   i) $c < a + b$ de onde $c + c < a + b + c = 24 \ \Rightarrow c < 12$

   ii) $3c > a + b + c = 24 \Rightarrow c > 8$.

   Logo, $c = 9$, $c = 10$ e $c = 11$ são as alternativas possíveis para $c$ de maneira a satisfazer i) e ii). Mas, pelo teorema de Pitágoras, $a^2 + b^2 = c^2$, logo $c = 10$, $a = 6$ e $b = 8$ é a única solução.

4. O círculo de maior raio que podemos obter de um triângulo é determinado pela circunferência nela inscrita. Segue dos dados do problema que o raio da circunferência inscrita do triângulo dado é maior ou igual que $r$.

   Dividindo cada lado do triângulo em $n$ lados iguais e traçando retas paralelas aos outros dois lados como indicado na figura, obteremos $n^2$ triângulos iguais (por que cada reta paralela encontra o lado oposto do triângulo no ponto de divisão?). Claramente estes triângulos são semelhantes ao triângulo inicial, sendo que a razão de semelhança é $\frac{1}{n}$. Da construção feita podemos concluir que de cada triângulo menor pode se obter um círculo de raio maior ou igual que $\frac{r}{n}$ (o raio da circunferência inscrita é maior ou igual que esse valor).



5. Suponhamos que $\sqrt{k^2 - kp} = n$ onde $n$ é um número natural. Fazendo operações elementares $\sqrt{k^2 - kp} = n$ se, e somente se, $k^2 - pk - n^2 = 0$. Resolvendo esta equação de $2^o$ grau em $k$, temos que:

$$k = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4n^2}}{2} \qquad (1)$$

   Como $k$ é um número inteiro então, necessariamente, $p^2 + 4n^2$ tem que ser da forma $a^2$, com $a$ sendo um número inteiro positivo. Portanto

$$p^2 + 4n^2 = a^2 \text{ se, somente se, } p^2 = (a + 2n)(a - 2n).$$

Como $p$ é um número primo e claramente $a + 2n \geq a - 2n$, só temos duas possibilidades:

(i) $a + 2n = p^2$ e $a - 2n = 1$; ou

(ii) $a + 2n = p$ e $a - 2n = p$.

De (i) concluímos que $a = \frac{p^2+1}{2}$ e $n = \frac{p^2-1}{4}$. Note-se que isto implica que $p \neq 2$ pois $n$ é um número natural.

Do segundo caso (ii) concluímos que $a = p$ e $n = 0$.

Substituindo estes valores na equação (1) obtemos que:

Se $p = 2$, então $k = 2$ ou $k = 0$.

Se $p \neq 2$, então os valores para $k$ serão

$$k_1 = (\frac{p+1}{2})^2, \; k_2 = -(\frac{p-1}{2})^2, \; k_3 = p, \; \text{ou } k_4 = 0$$