III OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DE RIBEIRÃO PRETO

Nível I

6^o e 7^o ano do Ensino Fundamental

FASE DE SELEÇÃO - 27 de setembro de 2008

- **Cada questão da parte A vale 4 pontos e cada questão da parte B vale 10 pontos (total de pontos do nível I-fase de seleção = 60 pontos).**
- **Caro Professor, guarde a prova dos seus alunos. Lembre-se que a Comissão Organizadora poderá solicitar em qualquer momento a prova resolvida pelos alunos. Lembre-se também que o dia 13 de outubro é a data limite para o envio do relatório da Fase de Seleção. O referido relatório permitirá à Comissão Organizadora decidir a Nota de Corte para a Fase Final. A publicação da Nota de Corte será disponibilizado no dia 24 de outubro no site oficial do evento http://dfm.ffclrp.usp.br/mat/olimpiada.**

GABARITO PARTE A

No da Questão	Resposta
Questão No 1	C
Questão No 2	C
Questão No 3	C
Questão No 4	B
Questão No 5	D
Questão No 6	A
Questão No 7	E
Questão No 8	D
Questão No 9	D
Questão No 10	C

1. Considere x o peso da melancia. Temos:

$$x = \frac{9}{10}x + \frac{9}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{10}x + \frac{9}{10} \Rightarrow 10x = 9x + 9 \Rightarrow x = 9.$$

Portanto, a melancia pesa 9 kilos.

Resposta: (C)

2. O número deve ser divisível por 2 e por 3. Logo, o menor múltiplo positivo de 6, com quatro dígitos, escrito apenas com os algarismos 1 e 2 é 1122. Portanto, a soma de seus algarismos é 6.

   Resposta: (C)

3. Denotando por x a idade de Natália e por y a idade de sua mãe obtemos:

$$(x-5)(y-5)=52.$$

   Fatorando 52 em fatores primos temos

$$(x-5)(y-5)=52=2^2\times 13.$$

   Como $x<y$, temos três possibilidades:

   1) $x-5=1$ e $y-5=52$, o que implica $x=6$ e $y=57$.

   2) $x-5=2$ e $y-5=26$, o que implica $x=7$ e $y=31$.

   3) $x-5=4$ e $y-5=13$, o que implica $x=9$ e $y=18$.

   Usando a hipótese de que a mãe de Natália tinha mais de 20 e menos de 30 anos quando ela nasceu, concluímos que a idade de Natália é 7 anos.

   Resposta: (C)

4. Vamos denotar por A^+ o número de aposentados com mais de 60 anos, por A^- o número de aposentados com menos de 60 anos e por T o número de trabalhadores ativos. Temos que,

$$\frac{A^-}{A^+}=\frac{2}{5} \ \text{ e } \ \frac{A^+}{T}=\frac{2}{7}.$$

   Logo,

$$\frac{A^-}{T}=\frac{A^-}{A^+}\times\frac{A^+}{T}=\frac{2}{5}\times\frac{2}{7}=\frac{4}{35}.$$

   Assim,

$$\frac{A^-+A^+}{T}=\frac{A^-}{T}+\frac{A^+}{T}=\frac{4}{35}+\frac{2}{7}=\frac{14}{35}=\frac{2}{5}.$$

   Resposta: (B)

5. Observemos que na primeira hora você já teria tomado 3 comprimidos. Duas horas depois você teria tomado 5 comprimidos, 3 horas depois 7 comprimidos, 4 horas depois 9 comprimidos,..., 8 horas depois 17 comprimidos. Portanto, em 8 horas e 30 min você terá tomado os 18 comprimidos.

   Resposta: (D)

6. Chamaremos cara de 'a' e coroa de 'b'. Em 4 rodadas conseguimos que as quatro moedas sejam todas coroa (b, b, b, b). Por exemplo existem as seguinte seqüências de rodadas

$$(a, a, a, a) \to (b, b, b, a) \to (a, b, a, b) \to (a, a, b, a) \to (b, b, b, b)$$

ou

$$(a, a, a, a) \to (b, b, b, a) \to (a, a, b, b) \to (a, b, a, a) \to (b, b, b, b).$$

Vejamos agora que não é possível que em menos de 4 rodadas consigamos transformar (a, a, a, a) em (b, b, b, b). O grupo de moedas (b, b, b, b) só pode ter sido originada de uma moeda coroa (b) e 3 moedas cara (a) (isto em uma rodada). Mas, uma moeda coroa e 3 caras só podem ser originadas de 2 coroa (b) e 2 caras (a) (isto numa segunda rodada). Como obviamente duas moedas coroa e duas moedas cara não podem ser originadas, num única rodada, por 4 moedas cara (a, a, a, a) podemos concluir que em 3 rodadas é impossível transformar (a, a, a, a) em (b, b, b, b). Portanto, 4 é o número mínimo de rodadas para que as quatro moedas caras sejam transformadas em quatro moedas coroa.

Resposta: (A)

7. Como João Pedro pagou 3,00 reais na barraca das argolas e ainda sobrou 12 reais, a metade do que ele tinha era 3+12=15 e, portanto, ele tinha 30 reais no bolso. Na barraca do tiro ao alvo ele pagou 3,00 e, então, a metade do que ele tinha era 3+30=33; portanto, ele tinha 66 reais bolso quando chegou à barraca do tiro ao alvo. Pelo mesmo raciocínio, na barraca da pescaria a metade do que ele tinha era 3+66=69 e, portanto, ele tinha 138 reais quando foi à barraca da pescaria.

Resposta: (E)

8. O número de grãos colocados no tabuleiro é dado pela soma:

$$n = 1 + 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot (2 \cdot 2) + 2 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) + 2 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) + \ldots + 2 \cdot (\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}_{\text{62 vezes}}).$$

Portanto $n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \ldots + 2^{63}$.

Como $2^4 = 16 > 10$ e $2^{63} > 2^{60} = (2^4)^{15}$, temos que:

$$2^{63} > (2^4)^{15} = 16^{15} = \underbrace{16 \cdot 16 \cdots 16}_{\text{15 vezes}} > \underbrace{16 \cdot 16 \cdots 16}_{\text{10 vezes}} > \underbrace{10 \cdot 10 \cdots 10}_{\text{10 vezes}} = 10^{10}.$$

Logo $n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \ldots + 2^{63} > 2^{63} > 2^{60} > 10^{10}$.

Portanto D é a alternativa correta.

Resposta: (D)

9. Se enumerarmos todas as escolhas tais que a soma dos três dígitos é 15, teremos

$$(0,7,8),(0,6,9),(1,6,8),(1,5,9),(2,7,6),$$
$$(2,8,5),(2,9,4),(3,7,5),(3,8,4),(4,6,5)$$

Portanto a resposta é 10. Observe que em esta resposta não incluímos múltiplas escolhas do mesmo número, por exemplo $(5,5,5)$ ou $(3,9,3)$. Por outro lado não consideramos a ordem da escolha, assim na nossa análise $(1,6,8) = (6,1,8)$.

Resposta: (D)

10. Temos que $154 = 2 \times 7 \times 11$. Logo, as possíveis dimensões (em número de azulejos) do fundo da piscina são: 1×154, 2×77, 7×22 e 11×14. Sabemos, ainda, que o perímetro (em número de azulejos) do fundo da piscina divide 650. Como os possíveis perímetros são: $2 \times (1 + 154) = 310$, $2 \times (2 + 77) = 158$, $2 \times (7 + 22) = 58$ e $2 \times (11 + 14) = 50$, vemos que a única possibilidade para a dimensão do fundo da piscina é 11×14 e, conseqüentemente, a profundidade é $\dfrac{650}{50} = 13$.

Resposta: (C)

GABARITO PARTE B

1. Denote por x e y os lados do retângulo. Queremos que

$$x.y = 96 \quad e \quad 2x + 2y \leq 40$$

Fatorando em fatores primos $96 = 2^5.3$, temos as seguintes possibilidades:

1) $x = 1$ e $y = 96$

2) $x = 2$ e $y = 48$

3) $x = 4$ e $y = 24$

4) $x = 8$ e $y = 12$

5) $x = 16$ e $y = 6$

6) $x = 32$ e $y = 3$

Logo, $x = 8$ e $y = 12$ é a única solução que satisfaz $2x + 2y \leq 40$.

Critério de Correção:
(a) O aluno ganhará 01 ponto se responder afirmativamente para a questão sem justificar.

(b) Se o aluno conseguir formalizar o problema, escrevendo a equação e inequação ganhará 03 pontos. Se resolvê-las dando valores mas não justificar o fato de não existir outra solução, ganhará mais 04 pontos. Se justificar ou resolver a questão como indicado acima (ou de modo similar), ganhará mais 07 pontos.

2. Um modo de colocar apropriadamente os símbolos é mostrado a seguir

$$\begin{array}{ll} 2+2+2=6 & 6\times(6\div 6)=6 \\ (3\times 3)-3=6 & 7-(7\div 7)=6 \\ 4+4-\sqrt{4}=6 & 8-\sqrt{\sqrt{8+8}}=\ 6 \\ 5+(5\div 5)=6 & \sqrt{9}\times\sqrt{9}-\sqrt{9}=6. \end{array}$$

Note-se que existe mais de uma possibilidade para colocar os símbolos. Por exemplo $\sqrt{4}+\sqrt{4}+\sqrt{4}=6=4+4-\sqrt{4}$

Critério de Correção:
1,25 pontos por item bem resolvido. Zero pontos caso a solução do item estiver incorreta.