Gabarito Fase Final

1. Denotamos por m o número de meninas, logo $19 - m$ corresponde ao número de meninos. Seja x a quantidade em reais que corresponde a cada menina, logo cada menino recebe $150 + x$. Sendo R$ 5.000,00 a quantidade total de dinheiro a ser distribuída, obtemos

$$mx + (19 - m)(x + 150) = 5000.$$

$$19x - 150m = 2150$$

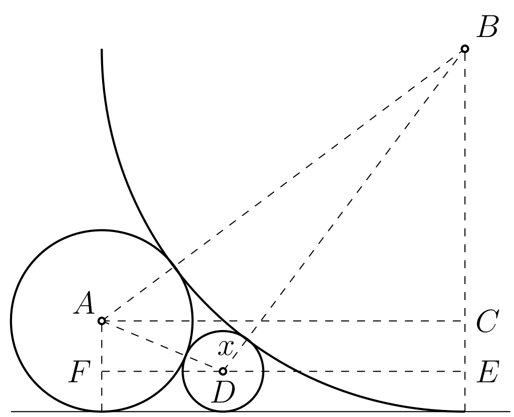
$$x = \frac{150m + 2150}{19}$$

$$x = \frac{2147 + 133m}{19} + \frac{3 + 17m}{19}$$

$$x = 113 + 7m + \frac{3 + 17m}{19}$$

Como x é inteiro, $3 + 17m$ é divisível por 19. É fácil ver, então, que $m = 11$. Logo, cada menina receberá R$ 200,00 reais e cada menino R$ 350,00.

2. Considere os pontos A, B, C, D, E e F localizados conforme mostra a figura abaixo.



Para o triângulo ABC, temos $AB = 5$ e $BC = 3$, logo $AC = 4$. Denotamos por x o raio do menor circulo, logo para o triângulo BED temos que $BD = 4 + x$ e $BE = 4 - x$, ou seja,

$$DE^2 = (4+x)^2 - (4-x)^2 = 16x \Rightarrow DE = 4\sqrt{x}.$$

Consideramos agora o triângulo ADF, para o qual temos que $AD = 1 + x$ e $AF = 1 - x$, logo

$$FD^2 = (1+x)^2 - (1-x)^2 = 4x \Rightarrow FD = 2\sqrt{x}.$$

Juntamos agora estas informações e concluímos o seguinte

$$4 = AC = FD + DE = 2\sqrt{x} + 4\sqrt{x} = 6\sqrt{x}.$$

Assim $\sqrt{x} = 2/3$ e então $x = 4/9$.

3. Da definição de f_2 temos que

$$\begin{aligned} f_2(1) &= f_1(1) = 2 \cdot 1 = 2^1, \\ f_2(2) &= f_1(f_1(1)) = f_1(2) = 2 \cdot 2 = 2^2, \\ f_2(3) &= f_1(f_1(f_1(1))) = f_1(f_2(2)) = f_1(2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3. \\ &\vdots \end{aligned}$$

Concluímos assim que $f_2(n) = 2^n$. Seguindo a definição de f_3 (e os resultados acima) obtemos

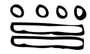
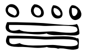
$$\begin{aligned} f_3(1) &= f_2(1) = 2 \\ f_3(2) &= f_2(f_2(1)) = f_2(2) = 2^2 \\ f_3(3) &= f_2(f_2(f_2(1))) = f_2(f_3(2)) = f_2(2^2) = 2^{2^2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

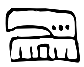
logo

$$f_3(n) = \underbrace{2^{2^{\cdots^{2}}}}_{n \text{ vezes}}$$

4. Como os três números são consecutivos, necessariamente temos que

 =4 e  =0.

(veja os símbolos nas duas últimas colunas dos dois últimos números). Na última coluna a direita, observamos agora que o símbolo  precede ao símbolo , portanto  corresponde ao número 3 (uma vez que os números estão ordenados em ordem crescente). Resta determinar os símbolos que correspondem ao 1 e ao 2. Da terceira coluna observamos que  precede a , logo necessariamente  corresponde ao 1 e  corresponde ao 2 (pois os números estão ordenados em ordem crescente). Sendo assim, o primeiro dos números é

 $\times 5^3 +$  $\times 5^2 +$  $\times 5^1 +$  $\times 5^0 = 2\times 125 + 0\times 25 + 1\times 5 + 3 = 258$,

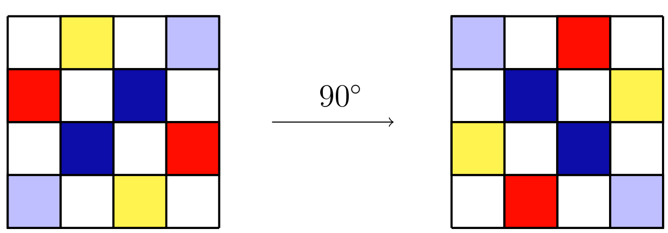
e, então, os outros dois números são 259 e 260.

5. Existem, no total, $\binom{16}{2}$ maneiras de colorir o tabuleiro, incluindo as equivalentes e as não equivalentes. Observamos que $\binom{16}{2}$ denota o número de maneiras de escolher dois objetos indistinguíveis dentre um total de 16 objetos. De fato, devemos escolher dois quadros dentre um total de 16, sendo que a ordem da escolha dos dois quadros a serem pintados é irrelevante. Sendo assim, o número de escolhas corresponde ao número de combinações calculadas como

$$\binom{16}{2} = \frac{16!}{2!(16-2)!} = \frac{16\cdot 15}{2} = \frac{240}{2} = 120.$$

Uma outra maneira de chegarmos nesse resultado é a seguinte: existem 16 escolhas para pintarmos o primeiro quadrado e restam 15 possibilidades para pintarmos o segundo quadrado, porém como a escolha de qual quadrado será o primeiro e qual será o segundo é irrelevante, devemos dividir por 2 as escolhas possíveis.

Dentre todas as 120 formas de colorir o tabuleiro existem algumas que possuem 4 formas equivalentes e outras que possuem só 2 formas. Não é difícil determinar quais são as maneiras de colorir o tabuleiro que só possuem 2 formas equivalentes. O desenho abaixo mostra que estas são, no total, 8 formas: 4 na posição inicial e mais 4 após a rotação de 90° (cada forma corresponde a uma cor),



Portanto, para obtermos o número total de maneiras não equivalentes, consideramos 120 - 8 = 112 que possuem 4 formas equivalentes e 8 com duas formas. Concluímos então, que temos

$$\frac{120-8}{4}+\frac{8}{2}=\frac{112}{4}+4=32$$

formas não equivalentes.

Observação. Em geral, para um tabuleiro de $n \times n$, onde n é um inteiro positivo par, temos

$$\left(\binom{n^2}{2}-\frac{n^2}{2}\right)\frac{1}{4}+\frac{n^2}{2}\frac{1}{2}=\frac{n^4}{8}$$

maneiras não equivalentes.