I OLIMPÍADA REGIONAL
DE MATEMÁTICA
DE RIBEIRÃO PRETO

Nível III

Ensino Médio

FASE FINAL - 08 de julho de 2006

- **Cada questão vale 10 pontos (total de pontos do nível 1 última fase = 40 pontos).**
- **A publicação dos melhores colocados será no dia 25 de julho no site www.ffclrp.usp.br/dfm.**

GABARITO

1. Suponhamos que o referido polinômio admite como raizes só números reais positivos, digamos r, s e t. Isto é

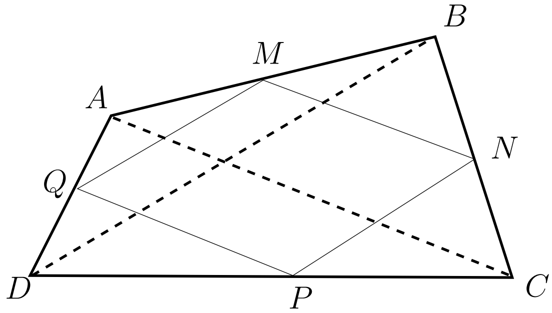
   $x^3 - 2x^2 + ax - 1/3 = (x-r)(x-s)(x-t) = x^3 - (r+s+t)x^2 + (rs+st+rt)x - rst$
   Sob essas condições podemos afirmar que $r + s + t = 2$ e $rst = 1/3$

   Mas, como a média geomêtria é sempre menor que a media aritmêtica, então

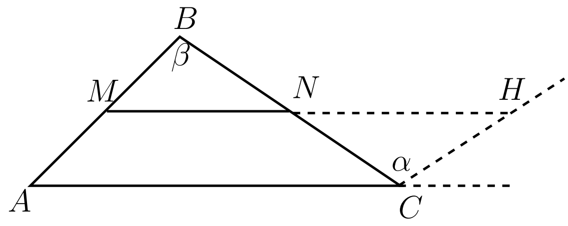
   $$\frac{1}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{rst} \leq \frac{r+s+t}{3} = \frac{2}{3}$$

   o qual implica que $3/2 \leq \sqrt[3]{3}$, isto é: $27/8 \leq 3$. Este absurdo implica que tais raizes não existem.

2. Verifiquemos primeiramente que o segmento de extremidades nos pontos M e N é paralelo à diagonal AC do quadrilátero.



Para isto, traçamos por C uma reta paralela à reta que contém o segmento AB e denotemos por H a interseção dessa reta com a reta que contém o segmento MN (ver fig 2). Como CH é paralelo a AB, segue que $\alpha = \beta$, assim o triângulo MBN é congruente ao triângulo HCN (ALA), o que implica que a medida do segmento CH é igual a medida do segmento BM, portanto MACH é um paralelogramo e segue que MN é paralelo a AC.



Agora, segue da congruência dos triângulos MBN e HCN que a medida de MN é igual a medida de HN, como AMHC é paralelogramo temos que a medida da diagonal AC é igual a duas vezes a medida de MN. Analogamente, mostramos que PQ é paralelo a AC e que a medida de AC é igual a duas vezes a medida de PQ. Portanto a soma dos lados MN e PQ do quadrilátero MNPQ é igual a medida da diagonal AC do quadrilátero ABCD.

Repetindo esse raciocínio, mostramos que a medida de DB é igual a duas vezes a medida de QM e também igual a duas vezes a medida de NP. Portanto o perímetro do quadrilátero MNPQ é igual a soma das medidas das diagonais AC e DB do quadrilátero ABCD.

3. Desenvolvendo a expressão temos que:

   $n(n+1)(n+2)(n+3) = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n = (n^2 + 3n)^2 + 2n^2 + 6n =$
   $(n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) = (n^2 + 3n + 1)^2 - 1.$

   Logo, se $n \neq 0$ então o produto $n(n+1)(n+2)(n+3)$ nunca será um quadrado perfeito.

4. Seja $M = 6 \cdot 12 \cdot 18 \cdots 996 = 6^{166} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 166$

   Note que o número de zeros com que termina M é igual ao máximo de fatores 10 que fazem parte da fatoração de M, isto é o número de fatores $5 \cdot 2$ em M. Como o número de fatores 2 em M é muito maior que o número de fatores 5, bastará analisar o número de fatores de 5.

   Em 6^{166} não existe nenhum fator 5 e como parte do produto $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 166$ estão os fatores $5, 10, 15, \ldots, 160, 165$. Como o número de fatores 5 existentes (observando que 25, 50, 75, 100, e 150 contém dois fatores e 125 contém três) podemos concluir que $M = 5^{40}k$, onde k é um inteiro não divisível por 5. Portanto $M = 10^{40}q$ onde

q não é divisível por 10. Logo podemos concluir que M finaliza com exatamente 40 zeros.