I OLIMPÍADA REGIONAL
DE MATEMÁTICA
DE RIBEIRÃO PRETO

Nível III

Ensino Médio

2^a FASE - 27 de maio de 2006

- **Cada questão da parte A da segunda fase vale 4 pontos e cada questão da parte B vale 10 pontos (total de pontos do nivel 1 segunda fase = 40 pontos).**
- **A publicação da da Nota de Corte de promoção à segunda fase será no dia 23 de junho no site www.ffclrp.usp.br/dfm. Lembre que o 12 de junho é data limite para o envio do relatório.**

GABARITO PARTE A

No da Questão	Resposta
Questão No 1	B
Questão No 2	E
Questão No 3	D
Questão No 4	C
Questão No 5	B

1. A função $\frac{1}{n+1}$ é decrescente mas sempre positiva, assumindo valor máximo igual a 1 para $n = 0$. Por outro lado, a função $\frac{3}{15-n}$ é crescente para $n = 0, 1, 2, ...14$, assume valores positivos com valor máximo 3 em $n = 14$. Para $n = 16, 17, ..$ assume valores negativos. Portanto o valor máximo é 3.

   Resposta: (D)

2. Suponha que $0,444... = \frac{m}{n}$. Daí multiplicando por 10 em ambos os lados obtemos, $4,444... = 10\frac{m}{n}$. Mas como $4,444... = 4 + 0,444...$ segue que $4 = 10\frac{m}{n} - \frac{m}{n} = 9\frac{m}{n}$. Logo $\frac{m}{n} = \frac{4}{9}$ e portanto

$$\sqrt{0,444...} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} = 0,666...$$

   Resposta: (E)

3. Como $456 = 114 \times 4$ então $123^{456} = 123^{4\times 114} = (123^4)^{114}$. Como o último dígito ao desenvolver 123^4 será 1 entao tambem o último dígito de $(123^4)^{114}$ será 1.

   Resposta: (A)

4. Observamos que na 1a. fileira temos 02 latas, na 2a. fileira temos 04 latas, na 3a. fileira temos 06 latas e assim sucessivamente até a n-ésima fileira, onde temos $2 \times n$ latas. A soma de todas as latas deve totalizar 272.
Então, $2+4+6+8+\ldots+2(n-1)+2n = 272$, ou ainda, $1+2+3+4+\ldots+(n-1)+n = 136$. Reescrevendo essa soma da seguinte forma $n+(n-1)+\ldots+4+3+2+1 = 136$ e somando as duas últimas igualdades, temos $n\times(n+1) = 272$. Resolvendo a equação do 2o. grau $n^2+n-272 = 0$, temos que $n = 16$. Logo, a base deve conter 32 latas.

   Resposta: (A)

5. Como as observações são feitas de 15 em 15 minutos, em 4 horas serão feitas 16 anotações, além da inicial. Temos a seguinte situação, (t=tempo):
- Na observação inicial (t= 0 minutos) temos 3 microorganismos;
- Na primeira observação (t= 15x1= 15 minutos) temos 2x3+2=2(3+1)=2x4 = 8 microorganismos;
- Na segunda observação (t= 15x2 = 30 minutos) temos 3x4+3=3(4+1)=3x5=15 microorganismos;
- Na terceira observação (t= 15x3 = 45 minutos) devemos ter 4x5+4=4(5+1)=4x6=24 microorganismos;
- Na n-ésima observação (t=15x n minutos) devemos ter (n+1)x(n+2)+(n+1) =(n+1)(n+3) microorganismos;
- Portanto, exatamente 4 horas (15x16 minutos) depois do início do experimento, teremos (16+1)(16+3) = 323 microorganismos.

   Resposta: (C)

GABARITO PARTE B

1. Seja n o número $100(12-\sqrt{143})$

$$n = 100(12-\sqrt{143})$$

$$n = 100\frac{(12-\sqrt{143})(12+\sqrt{143})}{(12+\sqrt{143})}$$

$$n = \frac{100}{12+\sqrt{143}}$$

   Mas como $11 < \sqrt{143} < 12$, então

$$4 = \frac{100}{25} < \frac{100}{12+12} < \frac{100}{12+\sqrt{143}} < \frac{100}{12+11} < 4,4$$

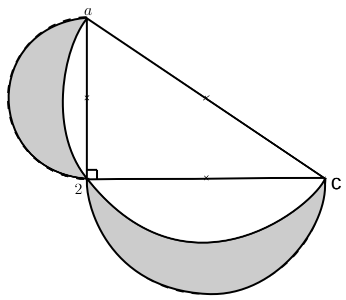
   de onde concluimos que $4 < n < 4,4$, logo o inteiro mais proximo de n é 4

   Critério de Correção:
   (i) Se o resultado foi obtido sem justificar 3 pontos

   (ii)

   (iii) Se o resultado foi obtido justificando adequadamente 10 pontos

2. Denotemos por S_1, S_2 e S_3 as semi-circunferencias de diametro $\overline{AC}$, $\overline{CB}$ e $\overline{BA}$ respectivamente.



Seja a o raio determinado por S_2 e b o raio determinado por S_3. Por teorema de pitagoras (o triângulo ABC é retângulo) o raio determinado por S_1 é $\sqrt{a^2+b^2}$.

Levando isto em consideração

$$\text{Area}(S_1) = \frac{\pi(\sqrt{a^2+b^2})^2}{2} = \frac{(a^2+b^2)\pi}{2}, \quad \text{Area}(S_2) = \frac{\pi b^2}{2}, \quad \text{Area}(S_3) = \frac{\pi a^2}{2}$$

Segue das condições do problema (vide gráfico) que

$$\text{Area}(S_2) + \text{Area}(S_3) + \text{Area-triângulo}(ABC) - \text{Area}(S_1) = \text{Area-achurada}$$

$$\frac{\pi b^2}{2} + \frac{\pi a^2}{2} + \text{Area-triângulo}(ABC) - \frac{(a^2+b^2)\pi}{2} = \text{Area-achurada}$$

Por tanto:

$$\text{Area-triângulo}(ABC) = \text{Area-achurada}$$

Critério de Correção:

(1) Se o aluno percebeu que

$$\text{Area}(S_2) + \text{Area}(S_3) + \text{Area-triângulo}(ABC) - \text{Area}(S_1) = \text{Area-achurada}$$

2 pontos.