I OLIMPÍADA REGIONAL
DE MATEMÁTICA
DE RIBEIRÃO PRETO

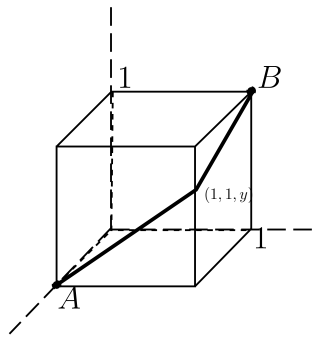
Nível II

7^a e 8^a séries do Ensino Fundamental
FASE FINAL - 08 de julho de 2006

- **Cada questão vale 10 pontos (total de pontos do nível 1 última fase = 40 pontos).**
- **A publicação dos melhores colocados será no dia 25 de julho no site www.ffclrp.usp.br/dfm.**

GABARITO

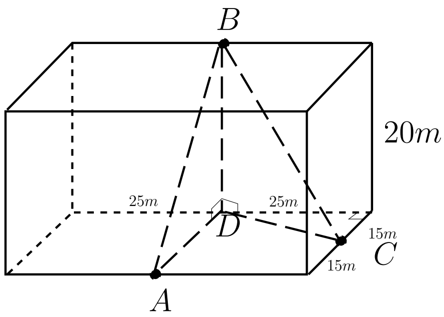
1. De acordo com a figura



a distância (seguindo o caminho mostrado) de A até B, $d(A, B)$, é dada por

$$d(A,B) = \sqrt{1+y^2} + \sqrt{1+(1-y)^2}$$

Observamos que se $y = 1/2$, então, $d(A, B) = \sqrt{5}$.
Afirmamos que se $y \neq 1/2$, então $d(A, B) > \sqrt{5}$. De fato, $\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+(1-y)^2} > \sqrt{5}$ se, e somente se, $-16y^2 + 16y - 4 < 0$ que, resolvendo a inequação, fornece $y \neq 1/2$.
Portanto, a menor distância é obtida quando caminha-se em linha reta de A, até o ponto médio da qualquer aresta que não contenha o ponto A e B, e depois desse ponto em linha reta até B.



2. Seja D o ponto mostrado no grafico. Segue pelo teorema de Pitágoras que
$|AB| = \sqrt{(30)^2 + (20)^2} = \sqrt{(10)^2(3^2 + 2^2)} = 10\sqrt{13}$

   $|DC| = \sqrt{(25)^2 + (15)^2} = \sqrt{5^2(5^2 + 3^2)} = 5\sqrt{5^2 + 3^2}$

   $|BC| = \sqrt{|BD|^2 + |DC|^2} = \sqrt{(20)^2 + (5\sqrt{5^2 + 3^2})^2} = \sqrt{5^2(4^2 + 5^2 + 3^2)} = \sqrt{5^2(2 \times 5^2)} = 5^2\sqrt{2}$

   logo,
   $|AB| + |BC| = 10\sqrt{13} + 25\sqrt{2}$

3. Vamos chamar de $x = a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ um número inteiro positivo qualquer com 6 algarismos, onde a_1, $a_2, \ldots,$ a_6 denotam seus algarismos e $y = a_6a_5a_4a_3a_2a_1$ esse x escrito na ordem inversa. Então:
$x = a_1 \times 10^5 + a_2 \times 10^4 + a_3 \times 10^3 + a_4 \times 10^2 + a_5 \times 10 + a_6$
$y = a_6 \times 10^5 + a_5 \times 10^4 + a_4 \times 10^3 + a_3 \times 10^2 + a_2 \times 10 + a_1$
Somando :
$x+y = (a_1+a_6)10^5+(a_2+a_5)10^4+(a_3+a_4)10^3+(a_3+a_4)10^2+(a_2+a_5)10+(a_1+a_6)$
$= (a_1 + a_6)(10^5 + 1) + (a_2 + a_5)(10^4 + 10) + (a_3 + a_4)(10^3 + 10^2)$
$= (a_1 + a_6)(10^5 + 1) + 10(a_2 + a_5)(10^3 + 1) + 10^2(a_3 + a_4)(10 + 1)$
$=11[9091(a_1 + a_5) + 910(a_2 + a_5) + 100(a_3 + a_4)]$
Portanto, divisível por 11.

4. Desenvolvendo a expressão temos que:

$$n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2.$$

   Como $k = n^2 + 3n + 1$ é um número inteiro, segue a afirmação.