I OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DE RIBEIRÃO PRETO

Nível II

6^a e 7^a séries do Ensino Fundamental

2^a FASE - 27 de maio de 2006

- **Cada questão da parte A da segunda fase vale 4 pontos e cada questão da parte B vale 10 pontos (total de pontos do nivel 1 segunda fase = 40 pontos).**
- **A publicação da da Nota de Corte de promoção à segunda fase será no dia 23 de junho no site www.ffclrp.usp.br/dfm. Lembre que o 12 de junho é data limite para o envio do relatório.**

GABARITO PARTE A

No da Questão	Resposta
Questão No 1	B
Questão No 2	E
Questão No 3	D
Questão No 4	C
Questão No 5	B

1. É claro que $1^{2006} = 1$. Quanto aos outros termos, podemos escreve-lôs como potência de dois. Ou seja, $4^{12} = (2^2)^{12} = 2^{24}$, $8^7 = (2^3)^7 = 2^{21}$ e $8^8 = (2^3)^8 = 2^{24}$. Agora podemos comparar facilmente estes números, sendo que a maior potência de 2 encontrada é igual a 25.

   Resposta: (C)

2. Temos que $|C_1| = 2\pi r_1$ e $|C_2| = 2\pi r_2$ são os comprimentos das círculos C_1 e C_2, respectivamente. Daí R_1 e R_2 devem satisfazer:

   $$2\pi R_1 = 2\pi r_1 + 1, \quad 2\pi R_2 = 2\pi r_2 + 1.$$

   Donde segue que $R_2 - R_1 = r_2 - r_1$.

   Resposta: (A)

3. as 08:00h o número total de pessoa que saberá da notícia é: 3

   as 08:30h, o número total de pessoa que saberá da notícia é: $3+3\times3 = 3(3+1) = 3\times4$

   as 9:00h, o número total de pessoa que saberá da notícia é: $3\times4+3(3\times4) = 3\times4^2$

as 9:30h, o número total de pessoa que saberá da notícia é: $3\times4^2+3(3\times4^2) = 3\times4^3$

assim, o número total de pessoa que saberá da notícia na k-esima meia hora apos as 8:00h será:

$3 \times 4^{k-1} + 3(3 \times 4^{k-1}) = 3 \times 4^k$

logo para encontrar a solução bastará resolver a equação $3 \times 4^k = 3072$

como $3 \times 4^k = 3072 = 3 \times 4^5$ então $k = 5$ (= duas horas e meia)

Portanto a partir das 10:30h a cidade toda estará sabendo da notícia.

Resposta: (B)

4. Temos que $ab = 48$, $bc = 56$ e $ac = 168$, então:
$48 \times 56 \times 168 = (ab)(bc)(ac) = a^2b^2c^2 = (abc)^2$.
Logo, $(abc)^2 = 451584 = (2^5 \times 7)^2$ e portanto $abc = 672$.

   Resposta: (A)

5. Como as observações são feitas de 15 em 15 minutos, em 4 horas serão feitas 16 anotações, além da inicial. Temos a seguinte situação, (t=tempo):
- Na observação inicial (t= 0 minutos) temos 3 microorganismos;
- Na primeira observação (t= 15x1= 15 minutos) temos 2x3+2=2(3+1)=2x4 = 8 microorganismos;
- Na segunda observação (t= 15x2 = 30 minutos) temos 3x4+3=3(4+1)=3x5=15 microorganismos;
- Na terceira observação (t= 15x3 = 45 minutos) devemos ter 4x5+4=4(5+1)=4x6=24 microorganismos;
- Na n-ésima observação (t=15x n minutos) devemos ter (n+1)x(n+2)+(n+1) =(n+1)(n+3) microorganismos;
- Portanto, exatamente 4 horas (15x16 minutos) depois do início do experimento, teremos (16+1)(16+3) = 323 microorganismos.

   Resposta: (C)

GABARITO PARTE B

1. Consideremos o número do cartão de Ronaldo como sendo

   $x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; 7 \;\; x_5 \;\; x_6 \;\; x_7 \;\; x_8 \;\; x_9 \;\; x_{10} \;\; x_{11} \;\; 8 \;\; x_{13} \;\; x_{14} \;\; x_{15} \;\; x_{16}$

   sendo que x_1, $x_2 \ldots$ denota o digito do cartão na primeira, segunda, etc posição.

   Por condição do problema $x_4 = 7$, $x_{12} = 8$ e
$x_1 + x_2 + x_3 = 18$
$x_2 + x_3 + 7 = 18$, logo $x_2 + x_3 = 11$ de onde $x_1 = 7$
$x_3 + 7 + x_5 = 18$, logo $x_3 + x_5 = 11$

$7 + x_5 + x_6 = 18$, logo $x_5 + x_6 = 11$
$x_5 + x_6 + x_7 = 18$, logo $x_7 = 7$
$x_6 + 7 + x_8 = 18$, logo $x_6 + x_8 = 11$
$7 + x_8 + x_9 = 18$, logo $x_8 + x_9 = 11$
$x_8 + x_9 + x_{10} = 18$, logo $x_{10} = 7$
$x_9 + 7 + x_{11} = 18$, logo $x_9 + x_{11} = 11$
$7 + x_{11} + 8 = 18$, logo $x_{11} = 3$, logo $x_9 = 8$, logo $x_8 = 3$, logo $x_6 = 8$, logo $x_5 = 3$, logo $x_3 = 8$, logo $x_2 = 3$
$3 + 8 + x_{13} = 18$, logo $x_{13} = 7$
$8 + 7 + x_{14} = 18$, logo $x_{14} = 3$
$7 + 3 + x_{15} = 18$, logo $x_{15} = 8$
$3 + 8 + x_{16} = 18$, logo $x_{16} = 7$

Por tanto o número do cartao será:

$$7 \quad 3 \quad 8 \quad 7 \quad 3 \quad 8 \quad 7 \quad 3 \quad 8 \quad 7 \quad 3 \quad 8 \quad 7 \quad 3 \quad 8 \quad 7$$

Critério de Correção:
(i) Se o aluno colocou o problema adequadamente 1 ponto

(ii) Se o aluno inicio a resolução do problema tentando resolver a equação envolvendo os dígitos, mais 1 ponto

(iii) Se o aluno conseguiu resolver os sistemas e encontrou alguns dos dígitos, mais 2 pontos.

Por outro lado,

(iv) Se o aluno encontrou o número do cartão mais não justificar o método dedutivo utilizado 6 pontos.

(v) Se o aluno encontrou o número do cartão e justificou o método dedutivo utilizado 10 pontos.

2. Sejam A, x e y a área e os lados procurados, respectivamente. Em termos de x e y a área e o comprimento de tela usados são dados por:

$$A = xy \quad (1)$$

$$2x + 2y = 64 \quad (2)$$

Dê (2) temos que $y = 32 - x$ e substituindo isso em (1) obtemos:

$$A = xy = x(32 - x)$$

Assim, a área é dado por uma equação de parábola com concavidade voltada para baixo, sendo $x = 0$ e $x = 32$ suas raízes. Pela simetria, $x = \frac{32}{2} = 16$ é o ponto onde a área assume valor máximo. Logo, a horta deve ser em formato quadrado, com lados de $16m$ obtendo uma área de $256m^2$.

Critério de Correção:
(i) O aluno apresentou a solução acima ou usou raciocínio equivalente, chegando à conclusão de que os lados devem medir $16m$. [**10 pontos**] Caso o aluno não tenha colocado a unidade de área, [**descontar 2 pontos**]

(ii) Caso o aluno tenha obtido a resposta sem um argumento dedutivo, [**2 pontos**].