I OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DE RIBEIRÃO PRETO

Nível I

5^a e 6^a séries do Ensino Fundamental

FASE FINAL - 08 de julho de 2006

- **Cada questão vale 10 pontos (total de pontos do nível 1 última fase = 40 pontos).**
- **A publicação dos melhores colocados será no dia 25 de julho no site www.ffclrp.usp.br/dfm.**

GABARITO

1. Podemos escrever

$$7^{12} = \underbrace{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times ... \times 7 \times 7}_{12 \text{ vezes}} = 49 \times 49 \times 49 \times 49 \times 49 \times 49.$$

Mas como $49 = 4 \times 12 + 1$ segue que

$$7^{12} = (4 \times 12 + 1) \times (4 \times 12 + 1) \times (4 \times 12 + 1) \times (4 \times 12 + 1) \times (4 \times 12 + 1) \times (4 \times 12 + 1)$$

Mas pela última igualdade temos que $7^{12} = q \times 4 + 1$ para algum inteiro positivo q, donde o resto da divisão de $7^{12} : 4$ é $r = 1$. Por outro lado,

$$7^{11} = (4 \times 12 + 1) \times (4 \times 12 + 1) \times (4 \times 12 + 1) \times (4 \times 12 + 1) \times (4 \times 12 + 1) \times (4 \times 1 + 3)$$

Logo $7^{11} = 4 \times q + 3$ para algum inteiro positivo q, segue que o resto da divisão de $7^{11} : 4$ é $r = 3$.

2. Para resolver este exercício basta observar que se a área da região do triângulo que está fora do quadrado é igual a área hachurada, então as áreas do quadrado e do triângulo são iguais. Lembramos que a área de um quadrado é dada por $l \times l$, onde l é a medida do lado do quadrado e a área do triângulo é dada por $(b \times h)/2$ onde b é a medida da base do triângulo e h é a medida da altura do triângulo. Como a base do triângulo tem a mesma medida do lado do quadrado, temos: $2 \times 2 = \dfrac{2 \times h}{2}$, de onde concluímos que $h = 4$.

3. Vamos chamar o recipiente com capacidade de 3 litros de I e o recipiente com capacidade de 7 litros de II.
   1o. Passo: Encher II com a água do rio. Situação: 0 litros em I e 7 litros em II.
   2o. passo: Encher I com a água que está em II. Situação: 3 litros em I e 4 litros em II.
   3o. passo: Jogar no rio os 3 litros de água que estavam em I. Situação: 0 litros em I e 4 litros em II.
   4o. passo: Encher I com a água que está em II. Situação: 3 litros em I e 1 litro em II.
   5o. passo: Jogar no rio os 3 litros que estão em I. Situação: 0 litros em I e 1 litro em II.
   6o. passo: Encher I com a água que está em II. Situação: 1 litro em I e 0 litros em II.
   7o. passo: Encher o recipiente II com a água do rio. Situação: 1 litro em I e 7 litros em II.
   8o. passo: encher I com a água que está em II. Situação: 3 litros em I e 5 litros em II.
   O recipiente II contém, então, os 5 litros de água necessários.

4. Se n denota o número de notas que teremos que dar para comprar o livro e t denota o número de notas que receberemos de troco, então bastara encontrar os valores para t tais que $5+7\times t$ seja multiplo de 17 (ou $5+17t$ seja multiplo de 7). Mais isto é equivalente a que $7\times t = 17\times n - 5 = (10+7)\times n - 5 = 5(2\times n - 1) + 7\times n$. Isto é, o número de notas, n, que se deverá usar para a compra tera que ser de modo que $5(2\times n - 1) + 7\times n)$ seja multiplo de 7. Como $n = 4$ é uma resposta (que implica que $t = 9$), então sim é possive fazer a compra do livro. Bastará entregar ao balconista \$ 4 notas de \$ 17 dolares (= \$68) e pedir como troco 9 notas de \$7 dolares (= 63)