VI Olimpíada Regional de Matemática de Ribeirão Preto

dcm.ffclrp.usp.br/mat/olimpiada

Nível III

Ensino Médio

Fase Final - 19/11/11

Gabarito

Cada questão vale 10 pontos. Total de pontos: 50.

1. Quantos números múltiplos de 6 e menores que 1000 têm a propriedade de que a soma de seus algarismos é 21?

   Solução: Se o número procurado é múltiplo de 6, então basta procurar por aqueles números que são múltiplos de 2 e 3. Como desejamos que a soma de seus algarismos seja 21 então necessariamente o número será múltiplo de 3, logo basta procurar números pares menores que 1000 cuja soma de seus algarismos seja 21. Para encontrar estes números, analisaremos as possibilidades do último algarismo do número. Claramente este último algarismo não pode ser nem 0 nem 2 pois não existe combinação possível para os dois primeiros algarismos do número procurado de modo que a soma seja 21. Se o último algarismo for 4, então os dois primeiros algarismos do número devem somar $21 - 4 = 17$, logo as possibilidades são

   $$894 \text{ e } 984.$$

   Se o último algarismo for 6 então os dois primeiros algarismos só podem ser 6 e 9 ou 7 e 8 (a soma tem que dar $21 - 6 = 15$). Com estas possibilidades o número pode ser

   $$696,\ 786,\ 876,\ \text{ou } 966.$$

   Seguindo o mesmo raciocínio, temos que o número com algarismo final igual a 8, poderá ser

   $$768,\ 678,\ 588,\ 858,\ 498,\ 948.$$

   Considerando todas as possibilidades, concluímos que a quantidade de números com as condições pedidas é 12.

2. Seja f uma função definida nos números inteiros pela seguinte regra

   $$f(n) = \begin{cases} n+3, & \text{se } n \text{ for ímpar,} \\ n/2, & \text{se } n \text{ for par.} \end{cases}$$

Suponha que k é impar e que $f(f(f(k))) = 27$. Diga quanto vale a soma dos algarismos de k.

Solução: Se k é impar, então $f(k) = k + 3$. Logo $k + 3$ é par e então $f(f(k))= f(k+3)= (k+3)/2$. Devemos considerar dois casos para o quociente $(k+3)/2$, pois não sabemos se este é par ou ímpar. No último caso

$$27 = f(f(f(k))) = f\left(\frac{k+3}{2}\right) = \frac{k+3}{2} + 3,$$

o qual implica que $k = 45$. Porém, isto não é possível pois $f(f(f(45))) = f(f(48)) = f(24) = 12$. Concluímos, assim, que $(k + 3)/2$ deve ser par, logo

$$27 = f(f(f(k))) = f\left(\frac{k+3}{2}\right) = \frac{k+3}{4},$$

e, portanto, $k = 105$, e a soma de seus algarismos é 6.

3. A sequência

$$1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 2, \ldots$$

consiste de 1's separados por blocos de 2's com n 2's no n-ésimo bloco. Calcule a soma dos primeiros 1234 termos da sequência.

Solução 1: O k-ésimo 1 está na posição

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{3}.$$

Por outro lado, também temos que

$$\frac{49 \times 50}{2} < 1234 < \frac{50 \times 51}{2}.$$

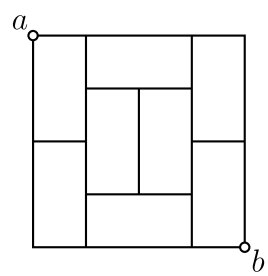
Assim, existem 49 1s nos primeiros 1234 termos da sequência e então todos os outros termos da sequência são 2. A soma destes últimos deve ser $1234 \times 2 - 49 = 2419$.

Solução 2: A soma de todos os termos até a ocorrência do k-ésimo número 1 é

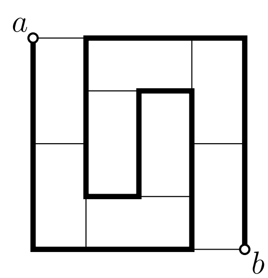
$$\begin{aligned} 1 + (2+1) + (2+2+1) + \ldots + (\underbrace{2+2+\ldots+2}_{k-1 \text{ vezes}} + 1) \\ &= 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) \\ &= k^2 \end{aligned}$$

O k-ésimo 1 se encontra na posição $1 + 2 + 3 + \ldots + k = k(k+1)/2$. O último 1 dentre os primeiros 1234 termos da sequência ocorre na posição 1225 para $k = 49$. Isto implica que a soma dos primeiros 1225 termos é $49^2 = 2401$. Portanto, a soma dos seguintes 9 termos (todos iguais a 2) é $2 \times 19 = 18$. No total temos $2401 + 18 = 2419$.

4. Cada retângulo do desenho abaixo é $2{\times}1$. Qual é o caminho mais longo de a até b definido sobre as bordas dos retângulos que não passa duas vezes pelo mesmo lugar? Mostre que a sua resposta é o caminho de comprimento máximo.

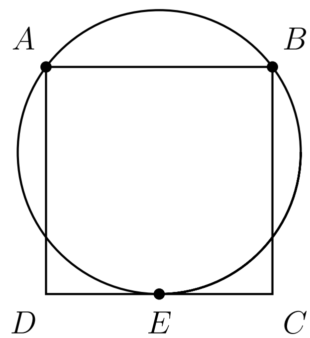


Solução: O caminho de maior comprimento é apresentado abaixo.



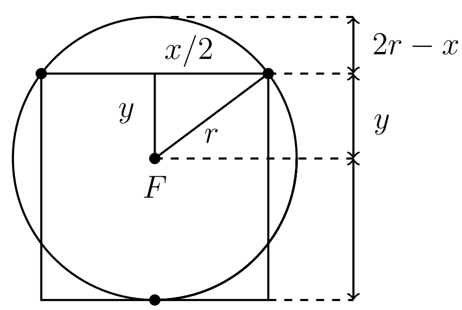
Para mostrarmos que esta escolha corresponde ao caminho de maior comprimento, observamos primeiro que a figura esta constituída por 18 vértices e 25 arestas. Dentre as arestas, 7 têm comprimeto 2 e 18 têm comprimeto 1. Em três esquinas não temos escolha, porém para qualquer outro vértice devemos escolher uma das duas arestas incidentes. A chave para provarmos que a escolha corresponde ao caminho de comprimento máximo consiste em observar que dentre todas as opções é possível escolher um caminho que utiliza todos os vértices de maneira que as arestas não utilizadas por este sejam de comprimento 1. Assim, se todos os vértices são utilizados, necessariamente 17 arestas devem estar no caminho, logo 8 arestas não pertencem ao caminho. Se todas as arestas que não estão no caminho tem comprimento 1, então o comprimento do caminho é máximo.

5. O quadrado $ABCD$ tem lado CD tangente no ponto E ao círculo ABE, veja figura abaixo.



Determine o quociente entre a área do círculo ABE e a área do quadrado $ABCD$.

Solução: Seja r o raio do círculo ABE, x o lado do quadrado de $ABCD$, e F o centro do círculo. Observando a figura abaixo



tem se

$$2r - x + y = r \Rightarrow y = x - r.$$

Logo, utilizando Pitágoras,

$$\begin{aligned}(x-r)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 &= r^2 \\ \Rightarrow \frac{5}{4}x^2 - 2xr &= 0 \\ \Rightarrow x &= \frac{8}{5}r\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{\text{área do círculo}}{\text{área do quadrado}} = \frac{\pi r^2}{x^2} = \frac{\pi r^2}{(64/25)r^2} = \frac{25}{64}\pi.$$