VI Olimpíada Regional de Matemática de Ribeirão Preto

Nível III

Ensino Médio Fundamental

FASE DE SELEÇÃO - 01 a 02 de setembro de 2011

- **Cada questão vale 1 ponto (total de pontos do nível III-fase de seleção = 10 pontos).**
- **Caro Professor, guarde a prova e os rascunhos dos seus alunos. Lembre-se que a Comissão Organizadora poderá solicitar em qualquer momento a prova resolvida pelos alunos. Lembre-se também que o dia 15 de setembro é a data limite para o envio do relatório da Fase de Seleção. O relatório estara disponível no endereço oficial do evento: http://dcm.ffclrp.usp.br/mat/olimpiada. O relatório permitirá à Comissão Organizadora decidir a Nota de Corte para a Fase Final. A Nota de Corte será disponibilizada online no dia 20 de setembro no endereço oficial do evento.**

GABARITO

No da Questão	Resposta
Questão No 1	C
Questão No 2	B
Questão No 3	B
Questão No 4	B
Questão No 5	E
Questão No 6	E
Questão No 7	B
Questão No 8	E
Questão No 9	E
Questão No 10	C

1. Vamos denotar as quantidades de suco de laranja, de uva e de limão por, x, y e z, respectivamente. Como todos os vasilhames estão cheios temos que

$$x + y + z = 64.$$

Também sabemos que a quantidade total de suco de uva é metade da quantidade total de suco de limão, ou seja, $z = 2y$. Substituindo na equação anterior temos:

$$x + y + 2y = 64 \Rightarrow y = \frac{64 - x}{3}.$$

Analisando as possibilidades para o valor de x, levando em conta que o valor de y deve ser um número inteiro, vemos que o único possível é $x = 16$, e então, $y = \frac{64 - 16}{3} = \frac{48}{3} = 16$. Os outros valores fornecem números não divisíveis por 3.

Resposta: (C)

2. Basta observarmos que $n^3 - 1 = (n-1)(n^2+n+1)$. Como este número deve ser primo, a única decomposição possível é $1\times$ o próprio número. Assim, a única possibilidade para n é $n = 2$, já que $n^2 + n + 1 > 1$ resultando o número primo 7. Portanto, apenas um número primo é possível.

   Resposta: (B)

3. Observa-se que o gerador de um determinado número é o seu múltiplo de três mais próximo dividido por três, assim, o múltiplo de três mais próximo de 2008 é o 2007 e o seu gerador é $\frac{2007}{3} = 669$. Portanto, 669 é o gerador de 2008.

   Resposta: (B)

4. Para facilitar nosso argumento consideraremos as seguintes notações auxiliares:

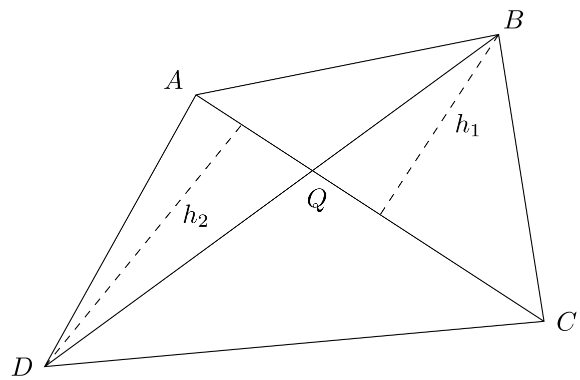
   • Q denotará ponto de interseção das diagonais do quadrilátero;

   • A área do triângulo de vértices X, Y e Z será denotado por área$(\triangle_{XYZ})$;

   • O peso da fatia do bolo dado pelo triângulo de vértices X, Y e Z será denotado por peso$(\triangle_{XYZ})$.

   Sendo assim, se p denotar o peso de uma unidade de volume e h a altura do bolo, então
$$\text{peso}(\triangle_{XYZ}) = p \times h \times \text{área}(\triangle_{XYZ}).$$
   Desta igualdade podemos concluir que
$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{AQ} \times h_1}{\overline{QC} \times h_1} = \frac{\text{área}(\triangle_{BAQ})}{\text{área}(\triangle_{BCQ})} = \frac{\text{peso}(\triangle_{BAQ})/(p \times h)}{\text{peso}(\triangle_{BCQ})/(p \times h)} = \frac{\text{peso}(\triangle_{BAQ})}{\text{peso}(\triangle_{BCQ})}$$
   e,
$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{AQ} \times h_2}{\overline{QC} \times h_2} = \frac{\text{área}(\triangle_{DAQ})}{\text{área}(\triangle_{CDQ})} = \frac{\text{peso}(\triangle_{DAQ})/(p \times h)}{\text{peso}(\triangle_{CDQ})/(p \times h)} = \frac{\text{peso}(\triangle_{DAQ})}{\text{peso}(\triangle_{CDQ})}$$

onde, h_1 denota a altura do triângulo BAQ (= à altura do triângulo BCQ) e h_2 denota a altura do triângulo ADQ (= à altura do triângulo CDQ) como mostrado na figura.



Destas duas últimas igualdades podemos afirmar que

$$\frac{\text{peso}(\triangle_{BAQ})}{\text{peso}(\triangle_{BCQ})} = \frac{\text{peso}(\triangle_{DAQ})}{\text{peso}(\triangle_{CDQ})}$$

onde,

$$\text{peso}(\triangle_{BAQ}) = \frac{\text{peso}(\triangle_{DAQ})}{\text{peso}(\triangle_{CDQ})} \times \text{peso}(\triangle_{BCQ}).$$

Substituindo os valores dados no problema concluímos que

$$\text{peso}(\triangle_{BAQ}) = \frac{120}{200} \times 300 = 180.$$

Resposta: (B)

5. Seja N o resultado do produto indicado. Isto é,

$$N = 6 \times 12 \times 18 \times \ldots \times 996.$$

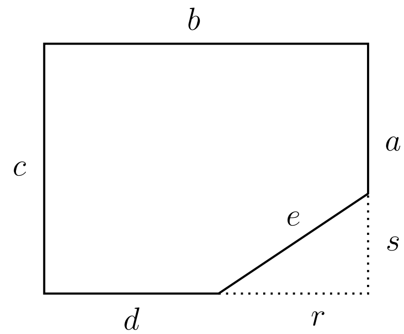
Como também podemos escrever

$$\begin{aligned} N &= (6 \times 1) \times (6 \times 2) \times (6 \times 3) \times \ldots \times (6 \times 166) \\ &= 6^{166} \times 1 \times 2 \times 3 \ldots 166, \end{aligned}$$

então o números de zeros que aparece no final do número N corresponde ao número máximo de fatores 10 que aparecem na fatoração de N. Ou melhor, o número máximo de fatores 5×2. Por outro lado, é claro que o número de fatores 2 que aparece na fatoração é muito maior que o número de fatores 5, logo bastará contar quantos fatores 5 aparece na fatoração colocada acima. Como em 6^{166} não existe nenhum fator 5 e em $1 \times 2 \times 3 \ldots \times 166$ estão os fatores $5, 10, 15, \ldots, 160, 165$ então podemos contar os fatores 5 existentes (levando em consideração que $25, 50, 75, 100$ e 150 contribui com dois fatores cada enquanto 125 contribui com três fatores). Todas estas conclusões nos permite afirmar que $N = 10^{40} \times Q$ onde Q é um número não divisível por 10. Esta última igualdade implica que o número N terminara com exatamente 40 zeros.

Resposta: (E)

6. Nomeamos os lados do pentágono como a, b, c, d, e e, e os outros dois lados da região triangular como r e s. Veja a figura abaixo.



Utilizando Pitágoras temos que

$$r^2 + s^2 = e^2,$$

porém esta equação não apresenta solução inteira em r e s se $e = 19$ ou $e = 31$, logo necessariamente e é um dos números 13, 20 ou 25. Observe que r e s devem ser inteiros pois d e a são inteiros. Para $e = 13$ temos $(r, s, e) = (5, 12, 13)$, para $e = 20$ temos $(r, s, e) = (12, 16, 20)$, e para $e = 25$ temos que $(r, s, e) = (15, 20, 25)$ ou $(r, s, e) = (7, 24, 25)$. Se $s = c - a$, então $s = 16$ ou $s = 24$ não são possíveis, pois qualquer um destes valores não pode ser obtido como a diferença de dois dos comprimentos fornecidos no enunciado, ou seja $\{13, 19, 20, 25, 13\}$. Analogamente, $r = b - d$ permite descartar o valor $r = 15$. Concluimos portanto que

$$(r, s, e) = (5, 12, 13),$$

o qual implica $b = 25$, $c = 31$, e assim

$$\text{área} = b \times c - \frac{1}{2} r \times s = 25 \times 31 - \frac{1}{2} 5 \times 12 = 745.$$

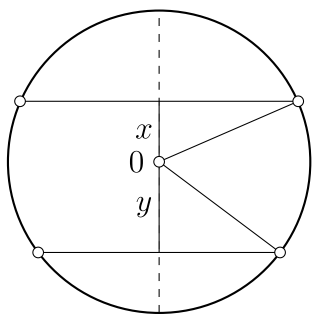
Resposta: (E)

7. Observamos que a primeira igualdade pode ser escrita como $A = 2+1/A$ e a segunda como $B = 1 + 1/B$. Logo $B - 1/B = 1$ e $A - 1/A = 2$, e assim

$$A + B - \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right) = A - \frac{1}{A} + B - \frac{1}{B} = 2 + 1 = 3.$$

Resposta: (B)

8. Suponhamos que x é a distância da origem do círculo até a corda de comprimento 10, e r a distância da origem até a corda de comprimento 14. Sejam x e y definidos segundo a figura abaixo.



Portanto

$$\begin{cases} x^2 + 25 & = r^2 \\ y^2 + 49 & = r^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 25 = y^2 + 49 \Rightarrow x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 24.$$

Como $x + y = 6$, da última igualdade acima resulta $x - y = 4$. Temos assim um sistema de duas equações e duas incognitas, com solução $x = 5$, $y = 1$ o qual implica em $r^2 = 50$. Os valores de x e y por outro lado também mostram que a corda de comprimento $\sqrt{a}$ passa duas unidades abaixo da origem do círculo. Assim, utilizando Pitágoras mais uma vez e chamando o raio da corda de R, temos que

$$R^2 + 2^2 = 50 \Rightarrow R^2 = 46 \Rightarrow a = (2R)^2 = 184.$$

Resposta: (E)

9. O programa “não-tão-esperto” vai calculando a função recursivamente

$$
\begin{aligned}
F(15) &= F(14) + F(13)\\
&= F(13) + F(12) + F(12) + F(11)\\
&= F(12) + F(11) + F(11) + F(10) + F(11) + F(10) + F(10) + F(9)\\
&= F(11) + F(10) + F(10) + F(9) + F(10) + F(9) + F(9) + F(8)\\
&\quad + F(10) + F(9) + F(9) + F(8) + F(9) + F(8) + F(8) + F(7)\\
&= F(10) + F(9) + F(9) + F(8) + F(9) + F(8) + F(8) + F(7) + F(9) + F(8)\\
&\quad + F(8) + F(7) + F(8) + F(7) + F(7) + F(6)\\
&\quad + F(9) + F(8) + F(8) + F(7) + F(8) + F(7) + F(7) + F(6) + F(8) + F(7)\\
&\quad + F(7) + F(6) + F(7) + F(6) + F(6) + F(5)\\
&= F(9) + F(8) + F(8) + F(7) + F(8) + F(7) + F(7) + F(6) + F(8)\\
&\quad + F(7) + F(7) + F(6) + F(7) + F(6) + F(6) + F(5) + F(8)\\
&\quad + F(7) + F(7) + F(6) + F(7) + F(6) + F(6) + F(5) + F(7) + F(6)\\
&\quad + F(6) + F(5) + F(6) + F(5) + F(5) + F(4) + F(8) + f(7)\\
&\quad + F(7) + F(6) + F(7) + F(6) + F(6) + F(5) + F(7) + F(6)\\
&\quad + F(6) + F(5) + F(6) + F(5) + F(5) + F(4) + F(7) + F(6)\\
&\quad + F(6) + F(5) + F(6) + F(5) + F(5) + F(4) + F(6) + F(5)\\
&\quad + F(5) + F(4) + F(5) + F(4) + F(4) + F(3)
\end{aligned}
$$

portanto, $F(9)$ foi chamada 13 vezes.

O programa “esperto” anota o valor que já foi calculado antes para usar mais tarde,

$$
\begin{aligned}
&F(0) = 0,\ F(1) = 1,\ F(2) = F(1) + F(0) = 1 + 0 = 1,\\
&F(3) = F(2) + F(1) = 1 + 1 = 2,\ F(4) = F(3) + F(2) = 2 + 1 = 3,\\
&F(5) = F(4) + F(3) = 3 + 2 = 5,\ F(6) = F(5) + F(4) = 5 + 3 = 8,\\
&F(7) = 13,\ F(8) = 21,\ F(9) = 34,\ F(10) = 55,\ F(11) = 89,\ F(12) = 144,\\
&F(13) = 233,\ F(14) = 377,\ F(15) = 610.
\end{aligned}
$$

portanto, $F(9)$ foi chamada somente 1 vez e nunca mais pois seu valor foi anotado e usado. Finalmente, a conclusão é que o “não-tão-esperto” calcula desnecessariamente 13-1 = 12 vezes a mais a função $F(9)$ para chegar em $F(15)$.

Resposta: (E)

10. Seja K o valor de uma unidade monetária em um dado tempo. Um ano depois o valor passa ser $K - 10\%K = 0,9K$. Dois anos depois será $(0,9)^2K$, três anos depois

$(0,9)^3K$ e n anos depois será $(0,9)^nK$. Logo precisamos estudar a desigualdade

$$\begin{aligned}(0,9)^nK &\leq K - 90\%K\\ (\frac{9}{10})^nK &\leq \frac{K}{10}.\end{aligned}$$

Aplicando log em ambos os membros

$$\log(\frac{9}{10})^n \leq \log(\frac{1}{10})$$

e das propriedades de log

$$\begin{aligned}n[\log(3^2) - \log(10)] &\leq \log(1) - \log(10)\\ n[2\log(3) - 1] &\leq 0 - 1\\ n[1 - 2\log(3)] &\geq 1\\ n &\geq \frac{1}{1 - 2\log(3)}.\end{aligned}$$

Considerando $\log(3) = 0,48$ teremos que $\dfrac{1}{1 - 2\log(3)} = 25$. Sendo assim, depois de 25 anos a moeda perderá 90 porcento de seu valor.

Resposta: (C)