IV OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DE RIBEIRÃO PRETO

Nível III

Ensino Médio

Fase Final - 28 de novembro de 2009

Gabarito Fase Final

1. Seja α o ângulo interno do triângulo ABC oposto ao lado de medida 13. Segue da Lei dos Cossenos que $169 = 144 + 25 - 2 \cdot 12 \cdot 4 \cdot \cos\alpha$, logo $\cos\alpha = 0$ e assim α é um ângulo reto. Portanto, o triângulo ABC é retângulo. Consequentemente, a hipotenusa do triângulo ABC é o diâmetro da circunferência que passa por A, B e C. Assim, o raio da circunferência é 13/2=6,5.

2. De $(a-c)^2 \geq 0$ obtemos que $a^2 + c^2 \geq 2ac$. Analogamente, $b^2 + d^2 \geq 2bd$. Desta forma, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 2(ac + bd)$. Usando as hipóteses do exercício, concluímos que $2 \geq 2(ac + bd)$, isto é, $ac + bd + 1 \leq 2$. Assim, 2 é uma cota superior para $ac+bd+1$. Falta mostrar que $ac+bd+1$ assume o valor 2. De fato, se $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$ e $d = 1$ então $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$ e $ac + bd + 1 = 2$.

3. Denote por u_i o $i-$ésimo termo da sequência e suponha que $u_2 = x$. Então:

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & 4 \\ u_2 & = & x \\ u_3 & = & x+4 \\ u_4 & = & (x+4)+4 = 2x+4 \\ u_5 & = & (2x+4)+(x+4) = 3x+8 \\ u_6 & = & (3x+8)+(2x+4) = 5x+12 \\ \hline S & = & 12x+32. \end{array}$$

   Por hipótese, $u_6 = 47$, logo $5x+12 = 47$ e assim $x = 7$. Portanto $S = 12x7 + 32 = 116$.

4. Primeiramente observe que $f(|x|) = f(x)$ e que:

$$f^2(x) = f(f(x)) = \sqrt{\frac{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}+1}{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}-1}} = \sqrt{\frac{2x^2}{2}} = |x|.$$

   Logo, $f^3(x) = f(f^2(x)) = f(|x|) = f(x)$. Por indução, obtemos que $f^n(x) = |x|$ para todo n par não-nulo e $f^n(x) = f(x)$ para todo n ímpar.

5. Seja $u = -\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ e $v = \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Note que $u^2+v^2=1$. Assim, (u,v) é um ponto da circunferência de raio 1 e centro na origem $(0,0)$. Portanto, existe $\eta \in \mathbb{R}$ tal que $(u,v) = (\operatorname{sen}(\eta), cos(\eta))$. Assim, definindo $C = \sqrt{A^2+B^2}$, obtemos que $\operatorname{sen}(\eta) = u = -\dfrac{A}{C}$ e $\cos(\eta) = v = \dfrac{B}{C}$. Desta forma,

$$A \operatorname{sen}(\phi) + B\cos(\phi) = -C\operatorname{sen}(\eta)\operatorname{sen}(\phi) + C\cos(\eta)\cos(\phi) = C\cos(\phi+\eta).$$

Portanto, $C = \sqrt{A^2+B^2}$ e $\eta = \operatorname{arctg}\Big(-\dfrac{A}{B}\Big)$. Note que as duas igualdades: $\operatorname{sen}(\eta) = -\dfrac{A}{C}$ e $\cos(\eta) = \dfrac{B}{C}$ são equivalentes a $\operatorname{tg}(\eta) = -\dfrac{A}{B}$ se $A>0$ e $B>0$.