V OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DE RIBEIRÃO PRETO

Nível III

Ensino Médio

FASE DE SELEÇÃO - 15 a 17 de setembro de 2010

- **Cada questão vale 1 ponto (total de pontos do nível III-fase de seleção = 10 pontos).**
- **Caro Professor, guarde a prova e os rascunhos dos seus alunos. Lembre-se que a Comissão Organizadora poderá solicitar em qualquer momento a prova resolvida pelos alunos. Lembre-se também que o dia 27 de setembro é a data limite para o envio do relatório da Fase de Seleção. O referido relatório permitirá à Comissão Organizadora decidir a Nota de Corte para a Fase Final. A Nota de Corte será disponibilizada no dia 30 de setembro no site oficial do evento http://dfm.ffclrp.usp.br/mat/olimpiada.**

GABARITO

No da Questão	Resposta
Questão No 1	D
Questão No 2	A
Questão No 3	C
Questão No 4	D
Questão No 5	A
Questão No 6	D
Questão No 7	C
Questão No 8	B
Questão No 9	E
Questão No 10	A

1. Observamos primeiramente que $8 \times 50 = 400$ e que $7 \times 57 = 399$. Ou seja, temos 50 múltiplos de 8 e 57 múltiplos de 7 que são menores que o número 400. Porém, como $mmc\{7, 8\} = 56$, temos sete números menores que 400 que são múltiplos de 7 e 8 ao mesmo tempo. Como $50 + 57 - 7 = 100$, temos que 400 é o centésimo número escrito .

   Resposta: (D)

2. Como $4500 \div 13 = 346 + \frac{2}{13} < 347$, e desde que não teremos postos nos extremos da praia, 12 é o número mínimo de postos necessários, sendo que a distância $d = 346 + \frac{2}{13}$.

   Resposta: (A)

3. Suponhamos que a distância percorrida na reta seja d Km e a distância percorrida na subida até chegar no topo do morro seja h Km. Se tempo=distância/velocidade, então

$$\frac{d}{4} + \frac{h}{3} + \frac{h}{6} + \frac{d}{4} = 6,$$

   ou seja, $3d + 4h + 2h + 3d = 6d + 6h = 72$, portanto $d + h = 12$. Assim a distância total percorrida é $2(d + h) = 24$ Km.

   Resposta: (C)

4. Considere dois números a e b naturais , distintos do zero. Pode-se provar que

$$a + b \leq ab + 1.$$

   De fato,

$$a + b = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{a-vezes} + \underbrace{1 + \ldots + 1}_{b-vezes} =$$
$$= 1 + \underbrace{1 + \ldots + 1}_{(a-1)-vezes} + \underbrace{1 + \ldots + 1}_{b-vezes} \leq 1 + \underbrace{\underbrace{1 + \ldots + 1}_{(a-1)-vezes} + \ldots + \underbrace{1 + \ldots + 1}_{(a-1)-vezes}}_{b-vezes} + \underbrace{1 + \ldots + 1}_{b-vezes} =$$
$$= 1 + \underbrace{\underbrace{1 + \ldots + 1}_{a-vezes} + \ldots + \underbrace{1 + \ldots + 1}_{a-vezes}}_{b-vezes} = 1 + ab$$

   Portanto, considerando-se o produto de um milhão de números naturais igual a um milhão, contendo a e b, substituindo-se $a \times b$ por $(ab) \times 1$ obtêm-se assim, outro produto de um milhão de números naturais igual a um milhão, porém com soma maior.

   O processo acima pode ser repetido no máximo 999.999 vezes e, então, o produto de soma maior possível é $1.000.000 \times \underbrace{1 \times \ldots \times 1}_{999.999-vezes}$, cuja soma é 1.999.999.

   Resposta: (D)

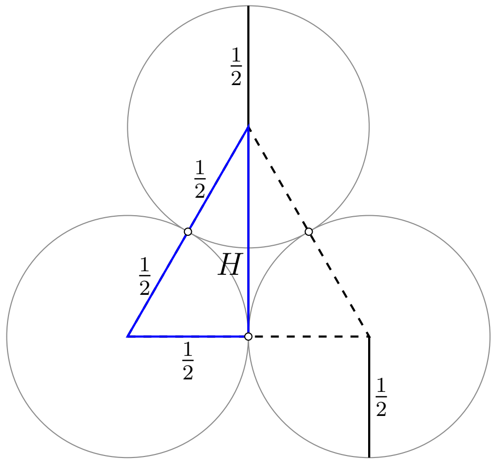
5. Pelo teorema de Pitágoras, sabemos que a medida y deve satisfazer

$$(4 - y)^2 + (4,5)^2 = 5^2.$$

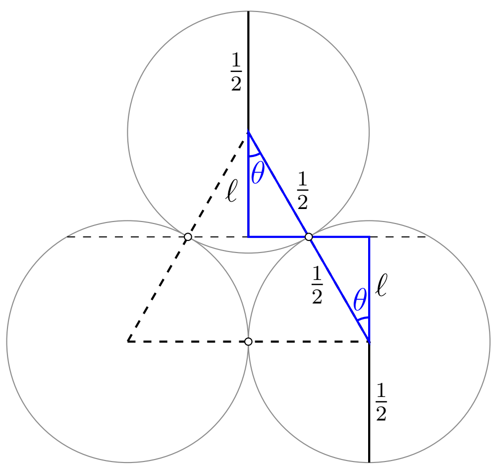
Assim, obtemos uma equação de grau dois em y, a saber, $y^2 - 8y + \frac{45}{4} = 0$. Pela fórmula de Bhaskara, $y = 4 - \frac{\sqrt{19}}{2}$. Ainda, como $4 < \sqrt{19} < 5$, segue $-\frac{5}{2} < -\frac{\sqrt{19}}{2} < -2$ e $\frac{3}{2} < y = 4 - \frac{\sqrt{19}}{2} < 2$. Ou seja, $y > 1,5$.

Resposta: (A)

6. Apresentamos duas maneiras de responder esta pergunta.



Resposta 1: $h = H + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$. Utilizando Pitágoras observamos que $H = \frac{\sqrt{3}}{2}$, logo $h = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$.



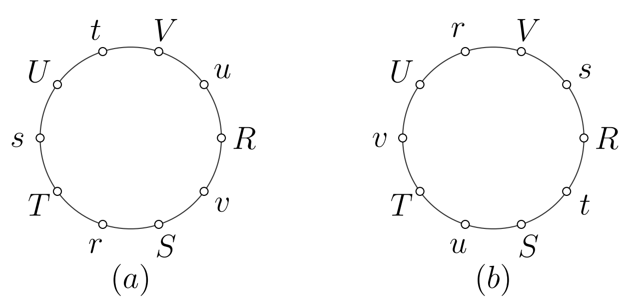
Resposta 2: $h = 2\ell + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, sendo $\ell = \cos\theta \cdot \frac{1}{2}$. Observamos que $\theta = \frac{\pi}{6}$, logo $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, portanto $h = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$.

Resposta: (D)

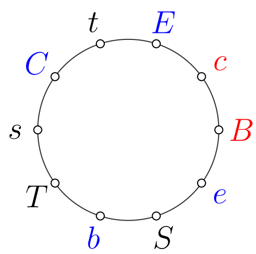
7. Dividimos o problema em dois casos:
1o. Caso: Vamos supor que a cor utilizada para pintar as bolinhas de número 1 e 4 são iguais. Para a bolinha de número 2 temos 3 possibilidades, dado que a cor da bolinha de número 1 já está escolhida. Entretanto, como as cores das bolinhas de número 2 e número 4 são diferentes, temos apenas 2 possibilidades de cores para a bolinha de número 3. Para a bolinha de número 5, temos 3 possibilidades, dado que as bolinhas de número 1 e 4 têm a mesma cor. Logo, temos, nesta situação, $4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 = 72$ possibilidades.
2o. Caso: Vamos supor que a cor utilizada para pintar a bolinha de número 1 seja diferente da cor utilizada para pintar a bolinha de número 4. Suponha ainda que a cor utilizada para pintar a bolinha de número 2 seja igual a cor utilizada para pintar a bolinha de número 4. Temos, então, 3 possibilidades de cores para a bolinha de número 3 e 2 possibilidades para a bolinha de número 5. Logo, $4 \times 1 \times 3 \times 3 \times 2 = 72$ possibilidades. Agora, se a cor utilizada para pintar a bolinha de número 4 for diferente da cor utilizada para pintar a bolinha de número 2, como esta também deve ser diferente da bolinha de número 1, temos 2 possibilidades de cores para a bolinha de número 2. Também as bolinhas de número 3 e 5 têm 2 possibilidades de cores, assim, neste caso, $4 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 = 96$ possibilidades.
Portanto, João poderia pintar esta figura de $72 + 72 + 96 = 240$ maneiras diferentes.

Resposta: (C)

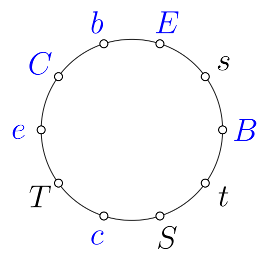
8. Dispomos os homens na sequência R, S, T, U e V, onde inicialmente não importa quem é identificado como R, quem como é identificado com S, etc. Observamos que com 5 casais, necessariamente todas as mulheres (denotadas pelas letras r, s, t, u, v) estão sentadas três lugares à direita do seu marido ou três lugares à esquerda, pois é impossível que algumas fiquem três lugares à direita e outras três lugares à esquerda. Sendo assim, só temos duas possíveis maneiras de dispor os casais, as quais mostramos abaixo.



Denotamos agora por A e a o senhor e a senhora Alves, respectivamente, B e b o senhor e a senhora Barreira, e assim por diante. Ambos arranjos mostrados acima apresentam a mesma ordem entre os homens e entre as mulheres. Assim, se a senhora e esta sentada a dois lugares da senhora b, então o senhor E deve estar sentado dois lugares à direita do senhor B. Adicionalmente, se o senhor E se encontra dois lugares à esquerda do senhor C, então os dois arranjos possíveis são

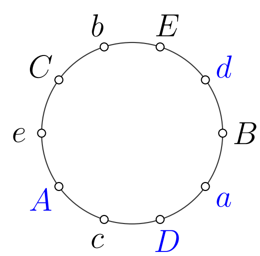


(a)



(b)

Porém, o arranjo (a) não é possível pois a senhora c deve estar sentada à direita do senhor A. Descartamos, portanto, o arranjo (a) e então em (b) substituímos T por A e t por a o qual leva a subsequente substituição de S por D e s por d. Assim, a disposição final é



Concluímos, portanto, que a senhora Evaristo está sentada à esquerda do senhor Alves.

Resposta: (B)

9. Seja

$$f(0, n) = n + 1, \qquad (i)$$
$$f(k, 0) = f(k - 1, 1), \qquad (ii)$$
$$f(k + 1, n + 1) = f(k, f(k + 1, n)). \qquad (iii)$$

Se utilizamos (iii) duas vezes obtemos

$$\begin{aligned} f(2,2) &= f(1+1,1+1) = f(1, f(1+1,1)) = f(1, f(1+1, 0+1)) \\ &= f(1, f(1, f(2, 0))). \qquad (G_1) \end{aligned}$$

Utilizando (ii) e (iii),

$$f(2,0) = f(1,1) = f(0, f(1,0)). \qquad (G_2)$$

Aplicando (ii) e (i) resulta

$$f(1,0) = f(0,1) = 1 + 1 = 2. \qquad (G_3)$$

Das equações (G_2) e (G_3), $f(2,0) = f(0,2)$, e de (i), $f(0,2) = 2 + 1 = 3$. Assim,

$$f(2,0) = f(1,1) = 3. \qquad (G_4)$$

Observamos que de (G_1) e (G_4),

$$f(2,2) = f(1, f(1,3)). \qquad (G_5)$$

É simples ver que para calcular $f(1,3)$ (utilizando (iii) e (i)), primeiro devemos obter $f(1,2)$, para o qual precisamos de $f(1,1)$. Generalizamos estes passos da seguinte maneira,

$$f(1,m) = f(0+1, (m-1)+1) = f(0, f(1, m-1)) = f(1, m-1) + 1.$$

Já temos $f(1,1) = 3$, portanto $f(1,2) = 4$, $f(1,3) = 5$ e $f(1,4) = 6$; logo (G_5) pode ser escrita, utilizando mais uma vez (iii) e (i), como

$$\begin{aligned} f(2,2) &= f(1, f(1,3)) = f(1,5) = f(0+1, 4+1) = f(0, f(1,4)) \\ &= f(0,6) = 7. \end{aligned}$$

Assim, a resposta é 7 .

Resposta: (E)

10. Observamos primeiro que qualquer subconjunto (não vazio) do conjunto dos inteiros $C = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ fornece um destes números. Por exemplo, o subconjunto $\{1,5,7,9\}$ fornece o inteiro 1579. Agora, um conjunto com n elementos apresenta 2^n subconjuntos (incluindo o conjunto vazio). Na pergunta temos $n = 9$, assim, a resposta é $2^9 - 1 = 511$, pois devemos excluir o conjunto vazio.

Resposta: (A)