VI Olimpíada Regional
de Matemática
de Ribeirão Preto

dcm.ffclrp.usp.br/mat/olimpiada

Nível II

8^o e 9^o ano do Ensino Fundamental
Fase Final - 19/11/11

Gabarito

Cada questão vale 10 pontos. Total de pontos: 50.

1. João recebeu R$ 450,00 de seu avô e pretende comprar CDs de jogos para seu Playstation 2. Sabendo que existem CDs que custam R$ 12,00 e CDs que custam R$ 18,00, qual o número mínimo de CDs que ele poderá comprar gastando todo o dinheiro? E o número máximo de CDs? É possível comprar exatamente o mesmo número de CDs de R$ 12,00 e R$ 18,00, sem sobrar troco?

   Solução: Este problema pode ser encarado como otimizar a soma $x + y$ safisfazendo a equação diofantina
$$12x + 18y = 450,$$
   em que x e y denotam o número de CDs de R$ 12,00 e R$ 18,00, respectivamente.

   Porém, pode ser resovido da seguinte maneira lógica mais simples:

   Ele comprará um número mínimo de CDs no caso de obtar por comprar um número máximo de CDs de R$ 18,00. Como $450 : 18 = 25$, obtemos que 25 é o número mínimo de CDs procurado.

   Por outro lado, o número máximo de CDs é obtido comprando um número mínimo de CDs de R$ 18,00. Como o maior número múltiplo de 12 menor que $450 - 18y$ é o 432, com $432 : 12 = 36$, obtemos que $x + y = 36 + 1 = 37$ é o número máximo de CDs procurado.

   Finalmente, o caso $x = y$ na equação diofantina é possível, para isto basta tomar $12x + 18x = 30x = 450$, donde $x = 15 = y$.

2. Qual é o menor número inteiro positivo que tem 7 divisores positivos?

   Solução 1: Denote por x o número procurado. Fatorando em fatores primos
$$x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m},$$

com p_k e α_k, $k = 1, \cdots, m$, sendo números primos e inteiros não negativos, respectivamente. Se $x = p_1^{\alpha_1}$, os divisores de x são $1, p_1, \cdots p_1^{\alpha_1}$, logo o número de divisores de x é $\alpha_1 + 1$. No caso $x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$, segue pelo princípio da contagem que o número de divisores de x é $(\alpha_1 + 1) \times \cdots \times (\alpha_m + 1)$. No exercício, o número de divisores de x é 7, logo $7 = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1) \cdots (\alpha_m+1)$. Como existem somente duas maneiras (a menos da ordem)de decompor o número primo 7 em fatores inteiros positivos, sem perda de generalidade podemos tomar

$$\alpha_1 + 1 = 7, \;\alpha_2 + 1 = 1, \alpha_j = 0, j = 3, \cdots m.$$

Daí $\alpha_1 = 6$ e $\alpha_2 = 0$. Portanto, obtemos o menor valor para x tomando $p_1 = 2$, isto é, $x = 2^6 = 64$.

Solução 2: (Motivada pela resolução de alunos do Colégio Itamarati - Ribeirão Preto) Usando o Lema a seguir, como 7 é um número ímpar, basta achar o menor quadrado perfeito que tenha 7 divisores. Daí obtem-se que $2^6 = 64 = 8^2$ é o menor inteiro positivo que tem 7 divisores.

Lema Seja x um número inteiro positivo. Então x tem um número ímpar de divisores se, e somente se, x é um quadrado perfeito.

Prova: Fatorando em fatores primos

$$x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m},$$

com p_k e α_k, $k = 1, \cdots, m$, sendo números primos e inteiros não negativos, respectivamente.

($\Rightarrow$) Suponha que x tenha um número ímpar de divisores. Sabemos da resolução 1 que o número de divisores de x é $(\alpha_1+1) \times \cdots \times (\alpha_m+1)$. Logo todo os números α_k, $k = 1, \cdots m$ devem ser números pares, pois se α_k fosse ímpar para algum k, $\alpha_k + 1$ seria par e o número de divisores de x $(\alpha_1 + 1) \times \cdots \times (\alpha_m + 1)$ seria par. Portanto, para cada $k = 1, \cdots m$, $\alpha_k = 2\beta_k$, com β_k inteiro positivo e

$$x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m} = p_1^{2\beta_1} p_2^{2\beta_2} \cdots p_m^{2\beta_m} = (p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_m^{\beta_m})^2.$$

($\Leftarrow$) Suponha que $x = a^2$ para algum inteiro positivo a. Escrevendo $a = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_m^{\beta_m}$, obtemos que

$$x = (p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_m^{\beta_m})^2 = p_1^{2\beta_1} p_2^{2\beta_2} \cdots p_m^{2\beta_m}.$$

Logo o número de divisores de x é o produto dos números ímpares $(2\beta_1 + 1) \times \cdots \times (2\beta_m + 1)$, o qual é um número ímpar.

3. João e Miguel se formaram juntos na universidade. Miguel se graduou como engenheiro e durante os primeiros 5 anos de formado seu salário anual foi metade do salário anual do João. Se em cada ano João gastou $\frac{1}{3}$ do seu salário anual e Miguel $\frac{1}{4}$ do seu, diga quanto dinheiro João possui ao final de 5 anos de trabalho sabendo que Miguel no final desses mesmos 5 anos tem R\$ $90.000,00$.

   Solução: Das informações do problema temos a seguinte equação, onde x denota o salário total que Miguel recebe em um ano.

$$90000 = 5 \times (x - \frac{1}{4}x).$$

   Resolvendo a equação obtemos $x = 24000$. Por outro lado

$$\begin{aligned} \text{Saldo do João} &= 5 \times [\text{salário anual de João} - \text{gasto anual do João}] \\ &= 5 \times [2 \times 24000 - \frac{1}{3}(2 \times 24000)] \end{aligned}$$

   De onde obtemos que o saldo de João é de R\$ 160.000,00.

4. Temos 19 discos de $1\,g, 2\,g, 3\,g, \ldots$ e $19\,g$ respectivamente (g é gramas). Sabe-se que nove desses discos são feitos de aço, outras nove de bronze e um é feito de ouro. Se o peso total dos discos de aço é $90\,g$ mais pesado que o peso total dos discos de bronze, determine o peso do disco de ouro.

   Solução: Denotemos por a, b e c o peso total dos discos de aço, bronze e ouro, respectivamente. Dos dados do problema temos que

$$a + b + c = 1 + 2 + 3 + \ldots + 19 = 190.$$

   Como o menor peso possível de 9 discos é $1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = 45$, então necessariamente

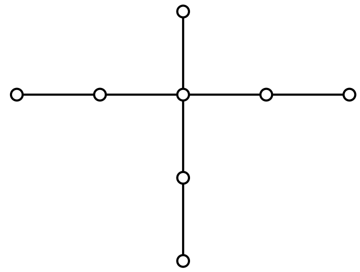
$$b \geq 45,$$

   de modo similar, o maior peso possível de 9 discos é $11 + 12 + \ldots + 19 = 135$, logo

$$135 \geq a.$$

   Como sabe-se que $a = b+90$ então $135 \geq b+90$, logo $45 \geq b$. Isto quer dizer que $45 \leq b \leq 45$, então necessariamente $b = 45$ e portanto $a = 135$ e $c = 190-(45+135) = 10$. Isto é, o peso do disco de ouro será de $10\,g$.

5. (Retirado de: Olimpíada Portuguesa de Matemática - 2004) Qual é o número máximo de triângulos com vértices nos pontos da figura abaixo que podemos construir?



Solução: Vamos dividir a análise em 2 casos:
1º caso: Não consideramos o ponto central (interseção do segmento de reta horizontal com o segmento de reta vertical). Se considerarmos 2 vértices sobre a linha vertical, e um vértice sobre a linha horizontal, teremos 3 possibilidades de escolha para os 2 pontos na vertical e 4 possibilidades de escolha para o ponto na horizontal, totalizando $3 \times 4 = 12$ triângulos. Se escolhermos 2 vértices sobre a linha na horizontal e 1 vértice sobre a linha vertical, teremos 6 possibilidades de escolha para os 2 pontos na horizontal e 3 possibilidades de escolha para o ponto da vertical, totalizando $6 \times 3 = 18$ triângulos. Temos, então, 12+18=30 possíveis triângulos sem considerarmos o ponto central.
2º caso: Consideramos o ponto central. Se um dos vértices for o centro temos que outro vértice estará sobre a linha vertical e um outro deverá estar sobre a linha horizontal. Temos, então, 3 possibilidades para o vértice que estará sobre a liha vertical e 4 possibilidades para o vértice que estará sobre a linha horizontal, totalizando $3 \times 4 = 12$ triângulos.
Portanto, o número máximo de triângulos com vértices nos pontos da figura é 30+12 = 42 triângulos.