VI OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DE RIBEIRÃO PRETO

NÍVEL II

8^o E 9^o ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

FASE DE SELEÇÃO - 01 a 02 de setembro de 2011

- **Cada questão vale 1 ponto (total de pontos do nível II-fase de seleção = 10 pontos).**
- **Caro Professor, guarde a prova e os rascunhos dos seus alunos. Lembre-se que a Comissão Organizadora poderá solicitar em qualquer momento a prova resolvida pelos alunos. Lembre-se também que o dia 15 de setembro é a data limite para o envio do relatório da Fase de Seleção. O relatório estara disponível no endereço oficial do evento: http://dcm.ffclrp.usp.br/mat/olimpiada. O relatório permitirá à Comissão Organizadora decidir a Nota de Corte para a Fase Final. A Nota de Corte será disponibilizada online no dia 20 de setembro no endereço oficial do evento.**

GABARITO

No da Questão	Resposta
Questão No 1	A
Questão No 2	C
Questão No 3	E
Questão No 4	B
Questão No 5	D
Questão No 6	B
Questão No 7	A
Questão No 8	B
Questão No 9	C
Questão No 10	A

1. Se chamarmos o salário do mês passado de x, então o salário deste mês é

$$x + \frac{20}{100}x = 600 + \frac{5}{100}11400.$$

Logo, $1,2x = 600 + 570 \Rightarrow x = 975.$

Então, Ana recebeu $975-600=375$ reais em comissão, isto é, 375 reais corresponde a 5% do valor de suas vendas do mês passado. Assim, o valor de suas vendas é $375 \div 0,05 = 7500$. Portanto, o valor das vendas do mês passado é R$ 7500,00.

Resposta: (A)

2. Vamos denotar as quantidades de suco de laranja, de uva e de limão por, x, y e z, respectivamente. Como todos os vasilhames estão cheios temos que

$$x+y+z=64.$$

Também sabemos que a quantidade total de suco de uva é metade da quantidade total de suco de limão, ou seja, $z=2y$. Substituindo na equação anterior temos:

$$x+y+2y=64 \Rightarrow y=\frac{64-x}{3}.$$

Analisando as possibilidades para o valor de x, levando em conta que o valor de y deve ser um número inteiro, vemos que o único possível é $x=16$, e então, $y=\dfrac{64-16}{3}=\dfrac{48}{3}=16$. Os outros valores fornecem números não divisíveis por 3.

Resposta: (C)

3. Observamos que $272=2^4\times 17$, assim, $272^{2011}=(2^4\times 17)^{2011}$. Temos, 1 como divisor ímpar e também todas as potências da forma 17^n com n variando de 1 a 2011. Temos, portanto, 2012 números ímpares divisores de 272^{2011}.

Resposta: (E)

4. As medidas em centímetros do baú são 300, 900 e 410. Como as geladeiras deverão ser transportadas de pé, façamos a seguinte decomposição do volume do baú

$$300\times 900\times 410 = 300\times 900\times 360 + 300\times 900\times 50.$$

Portanto, o número máximo de geladeira será

$$\frac{300\times 900\times 360}{60\times 90\times 180}=5\times 10\times 2=100.$$

No espaço restante, de volume $300\times 900\times 50$, cabem exatamente $5\times 10\times 1=50$ microondas.

Resposta: (B)

5. Denote por x e y os lados do terreno. Por hipótese, $2x+2y=240$, logo $x+y=120$. Como x e y são múltiplos de 9 e 15, existem p e q inteiros tal que $x=9p$ e $y=15q$, ou seja, precisamos resolver a equação $9p+15q=120$. Simplificando por 3, o problema se reduzir a achar p e q tal que $3p+5q=40$. As únicas soluções inteiras são $(p,q)=(5,5)$ e $(p,q)=(10,2)$. Portanto, as medidas possíveis para o terreno são $(x,y)=(45,75)$ e $(x,y)=(90,30)$, mas com a hipótese de um dos lados medir menos de 36 metros, obtem-se que a área é 2700 m^2.

   Resposta: (D)

6. Como $n^2-7n=n(n-7)\geq 0$ para $n\geq 7$, logo $n^2-7n+7\geq 7$ e $n+1\geq 8$ para $n\geq 7$. Isso implica que não obtemos números primos na forma $p(n)=(n^2-7n+7)(n+1)$ para $n\geq 7$, pois para $n\geq 7$, n^2-7n+7 e $n+1$ serão outros divisores de $p(n)$ além do 1 e do próprio $p(n)$. Assim basta considerar $0\leq n\leq 6$, ou seja $p(0)=7\times 1=7$, $p(1)=1\times 2=2$, $p(2)=-3\times 3=-9$, $p(3)=-5\times 4=-20$, $p(4)=-5\times 5=-25$, $p(5)=-3\times 6=-18$, e $p(6)=1\times 7=7$. Portanto, obtemos dois números primos distintos, 2 e 7.

   Resposta: (B)

7. A condição dada pode ser escrita como segue

$$\text{preço do diamante} = k \times (\text{peso do diamante})^2$$

   onde k denota a constante de proporcionalidade indicada.

   Se um diamante de 5 gramas custa 1000 reais então a constante de proporção é necessariamente $k=1000/5^2=40$. Sendo assim, o valor de um diamante de 2 gramas será $40\times(2)^2=160$ reais.

   Resposta: (A)

8. Para facilitar nosso argumento consideraremos as seguintes notações auxiliares:

   • Q denotará ponto de interseção das diagonais do quadrilátero;

   • A área do triângulo de vértices X, Y e Z será denotado por área$(\triangle_{XYZ})$;

   • O peso da fatia do bolo dado pelo triângulo de vértices X, Y e Z será denotado por peso$(\triangle_{XYZ})$.

   Sendo assim, se p denotar o peso de uma unidade de volume e h a altura do bolo, então

$$\text{peso}(\triangle_{XYZ}) = p \times h \times \text{área}(\triangle_{XYZ}).$$

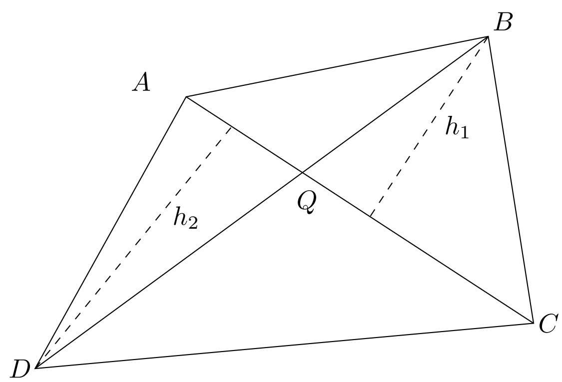
Desta igualdade podemos concluir que

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{AQ} \times h_1}{\overline{QC} \times h_1} = \frac{\text{área}(\triangle_{BAQ})}{\text{área}(\triangle_{BCQ})} = \frac{\text{peso}(\triangle_{BAQ})/(p \times h)}{\text{peso}(\triangle_{BCQ})/(p \times h)} = \frac{\text{peso}(\triangle_{BAQ})}{\text{peso}(\triangle_{BCQ})}$$

e,

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{AQ} \times h_2}{\overline{QC} \times h_2} = \frac{\text{área}(\triangle_{DAQ})}{\text{área}(\triangle_{CDQ})} = \frac{\text{peso}(\triangle_{DAQ})/(p \times h)}{\text{peso}(\triangle_{CDQ})/(p \times h)} = \frac{\text{peso}(\triangle_{DAQ})}{\text{peso}(\triangle_{CDQ})}$$

onde, h_1 denota a altura do triângulo BAQ (= à altura do triângulo BCQ) e h_2 denota a altura do triângulo ADQ (= à altura do triângulo CDQ) como mostrado na figura.



Destas duas últimas igualdades podemos afirmar que

$$\frac{\text{peso}(\triangle_{BAQ})}{\text{peso}(\triangle_{BCQ})} = \frac{\text{peso}(\triangle_{DAQ})}{\text{peso}(\triangle_{CDQ})}$$

onde,

$$\text{peso}(\triangle_{BAQ}) = \frac{\text{peso}(\triangle_{DAQ})}{\text{peso}(\triangle_{CDQ})} \times \text{peso}(\triangle_{BCQ}).$$

Substituindo os valores dados no problema concluímos que

$$\text{peso}(\triangle_{BAQ}) = \frac{120}{200} \times 300 = 180.$$

Resposta: (B)

9. Se 3 patos e 2 patinho pesam juntos 32 kg então 6 patos e 4 patinhos pesarão juntos 64 kilos. Como $6 = 2 + 4$, $4 = 1 + 3$ e sabe-se que 4 patos e 3 patinhos pesam juntos 44 kg, então 2 patos e 1 patinho deverão pesar $64 - 44 = 20$ kilos.

Resposta: (C)

10. Como todos estão necessariamente erradas: M diz maçã então só pode ser L ou ML; L diz laranja mas só pode ser M ou ML; e ML diz maçã&laranja mas só pode ser M ou L, nunca as duas ao mesmo tempo. Se tirar uma fruta só de ML ela vai revelar se é L ou M pois não pode ter as duas frutas ao mesmo tempo. Não pode porque já garantiram que os rótulos estão errados e ML não pode ter maçãs&laranjas, só pode ter um ou outro. Quando tirar a fruta saberemos qual delas é. Os outros saberemos automaticamente por exclusão pois, se ML for L então M só pode ter ML, e nada mais, pois se M tivesse M estaria certo desde o começo, e já sabemos que foram rotuladas erradas desde o começo. Aí, claro, L teria M e tudo estaria resolvido. Por outro lado, se quando checarmos ML obtivermos M, então L só pode ter ML porque, se não fosse ML e sim L, estaria certo desde o começo, o que já foi avisado que não aconteceu. Portanto basta uma checagem só na caixa ML para descobrir o que aconteceu e re-rotular tudo corretamente.

    Resposta: (A)