IV OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DE RIBEIRÃO PRETO

Nível II

8º e 9º ano do Ensino Fundamental

Fase Final - 28 de novembro de 2009

Gabarito Fase Final

1. Qual a soma dos algarismos do número $\sqrt{2004 \times 2002 \times 1998 \times 1996 + 36}$?

   Resposta: Temos que:
   $\sqrt{2004 \times 2002 \times 1998 \times 1996 + 36} =$
   $\sqrt{(2000+4)(2000+2)(2000-2)(2000-4)+36} =$
   $\sqrt{[(2000)^2-16][(2000)^2-4]+36} =$
   $\sqrt{(2000)^4-20(2000)^2+64+36} =$
   $\sqrt{(2000)^4-20(2000)^2+(10)^2} =$
   $\sqrt{[(2000)^2-10]^2} = (2000)^2-10 = 4.000.000-10 = 3.999.990.$
   Portanto, a soma dos algarismos é: $3+5\times 9 = 48$.

2. a) Simplifique a expressão

$$1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{x}}}.$$

   b) Certo computador tem duas teclas especiais: ∇, $\triangle$. A tecla ∇ transforma o número x que está na tela em $\frac{1}{x}$. A tecla $\triangle$ transforma o número x que está na tela em $1-x$.
   João tem um número na tela do computador e aperta sucessivamente, de forma alternada, as duas teclas. Após 1000 operações, a tela mostra o número 2004. Quais são os possíveis números que João tinha inicialmente na tela?

   Resposta: a)

$$1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}} = 1-\frac{1}{1-\frac{1}{\frac{x-1}{x}}} = 1-\frac{1}{1-\frac{x}{x-1}} = 1-\frac{1}{\frac{-1}{x-1}} = 1+x-1 = x.$$

   b) Vamos dividir o problema em duas partes:

1ª parte: Suponha que João aperte primeiro a tecla ∇. Então:

$$x \to \frac{1}{x} \to 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} \to \frac{x}{x-1} \to 1 - \frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1} \to 1 - x \to 1 - (1-x) = x,$$

isto é, após 6 operações voltamos em x. Como $1000 = 6 \times 199 + 4$, basta vermos o que acontece após 4 operações. Pelo visto acima, o resultado é $\dfrac{1}{1-x}$. Logo, temos:

$$\frac{1}{1-x} = 2004 \Rightarrow 1 = 2004 - 2004x \Rightarrow x = \frac{2003}{2004}.$$

2ª parte: Suponha que João aperte primeiro a tecla δ. Então:

$$x \to 1 - x \to \frac{1}{1-x} \to 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{-x}{1-x} \to \frac{1-x}{-x} \to 1 + \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} \to x,$$

isto é, após 6 operações voltamos em x. Como $1000 = 6 \times 199 + 4$, basta vermos o que acontece após 4 operações. Pelo visto acima, o resultado é $\dfrac{1-x}{-x}$. Logo, temos:

$$\frac{1-x}{-x} = 2004 \Rightarrow 1 - x = -2004x \Rightarrow x = -\frac{1}{2003}.$$

3. Considere a equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e c números inteiros. O número 93 é um possível valor para o discriminante desta equação, $\Delta = b^2 - 4ac$? E o número 94?

   Resposta: Seja $n = b^2 - 4ac$, como a, b e c são números inteiros, n também é inteiro. Desta igualdade temos que $ac = \dfrac{b^2 - n}{4}$ e, portanto, $b^2 - n$ é divisível por 4.
   Se b é um número par, então podemos escrever b da forma $b = 2k$, com $k \in \mathbb{Z}$, e assim, $b^2 = 4k^2$, isto é, b^2 é divisível por 4 e, portanto, n também deve ser divisível por 4.
   Se b é um número ímpar, então podemos escrever b da forma $b = 2k + 1$, com $k \in \mathbb{Z}$, e $b^2 = 4k^2 + 4k + 1$, consequentemente, n é da forma $n = 4m + 1$, onde $m = k^2 + k - ac \in \mathbb{Z}$.
   Portanto, se a, b e c são números inteiros, $\Delta = b^2 - 4ac$ é um número da forma $4m$ ou $4m+1$, para algum $m \in \mathbb{Z}$. Desta forma, 93 é um valor possível, pois $93 = 4 \times 23 + 1$, mas 94 não é um número possível, pois $94 = 4 \times 23 + 2$.

4. Os números inteiros positivos estão dispostos em fileiras horizontais da seguinte maneira:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 2 & 1 & & & \\
 & & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & & \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 & \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\
 & & & & \cdots & & & &
\end{array}$$

Quantas fileiras horizontais devemos escrever para que a soma de todos os números da última fileira colocada seja 14400?

Resposta: Observamos que em uma fileira com n números temos a seguinte disposição:

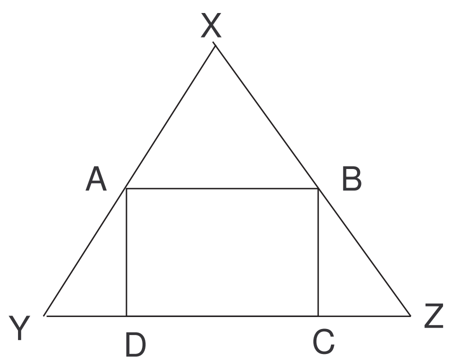
$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad \cdots \quad (n-1) \quad n \quad (n-1) \quad \cdots \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1$$

Os números desta fileira podem ser reagrupados e somados da seguinte forma

$$\begin{array}{llllllll} 1 & +2 & +3 & +4 & +5 & \cdots & +(n-2) & +(n-1) & +n \\ +(n-1) & +(n-2) & +(n-3)+ & +(n-4) & +(n-5) & \cdots & +2 & +1 & \end{array}$$

cujo valor da soma é $n \times n = n^2$. Logo, para que sua soma seja 14400, n deve ser igual a 120. Portanto, devemos ter 120 fileiras.

5. Na figura, $ABCD$ é um quadrado cuja área é metade da área do triângulo XYZ. Qual é a razão entre XA e XY?



Resposta: Sejam l o comprimento do lado do quadrado, h a altura do triângulo XAB, H a altura do triângulo XYZ e b o comprimento do lado YZ.

A área do quadrado é l^2 e a área do triângulo XYZ é $\frac{1}{2}bH$. Por hipótese,

$$l^2 = \frac{1}{4}bH = \frac{1}{4}b(h+l) \Rightarrow b = \frac{4l^2}{h+l}$$

Como os triângulos XYZ e XAB são semelhantes, temos:

$$\frac{XY}{XA} = \frac{b}{l} = \frac{H}{h} = \frac{h+l}{h} \Rightarrow b = \frac{(h+l)l}{h}$$

Das duas relações anteriores temos:

$$\frac{4l^2}{h+l} = \frac{(h+l)l}{h}$$

Assim,

$$4lh = h^2 + 2lh + l^2 \Rightarrow l^2 - 2lh + h^2 = 0$$

Dividindo por h^2 obtemos:

$$\left(\frac{l}{h}\right)^2 - 2\frac{l}{h} + 1 = 0$$

E, portanto, $\dfrac{l}{h} = 1$. Logo,

$$\frac{XY}{XA} = \frac{h+l}{h} = \frac{h}{h} + \frac{l}{h} = 1 + 1 = 2$$

e a razão $\dfrac{XA}{XY} = \dfrac{1}{2}$.