VI Olimpíada Regional de Matemática de Ribeirão Preto

dcm.ffclrp.usp.br/mat/olimpiada

Nível I

6^o e 7^o ano do Ensino Fundamental

Fase Final - 19/11/11

Gabarito

Cada questão vale 10 pontos. Total de pontos: 50.

1. Em três jogos de futebol, o time RP-Clube marcou três gols e levou um. Nesses três jogos sabe-se que o RP-Clube ganhou um jogo, empatou um e perdeu um. Com estas informações, diga qual foi o resultado do jogo ganho pelo RP-Clube.

   Solução: Como nos três jogos o RP-Clube só perdeu um jogo e levou só um gol, então podemos concluir que o jogo perdido do RP-Clube foi de 1 a 0 e o jogo de empate foi de 0 a 0. Mas o time marcou 3 gols no total, então é imediato que o jogo ganho pelo RP-Clube foi de 3 a 0.

2. Antonio diz que Paulo está mentindo. Paulo diz que Marcelo está mentindo. Marcelo diz que Paulo está mentindo. Tomás diz que Antonio está mentindo. Quantos destes meninos estão mentindo nesta história?

   Solução: Pare resolver esta questão precisaremos analisar dois casos.

   Caso 1: Paulo diz a verdade. Esta suposição implica que Marcelo mente, logo Paulo diz a verdade (o qual é compatível com este caso 1) e que Antônio mente (pois estamos no caso 1). Como este último implica que Tomás diz a verdade, podemos concluir que neste primeiro caso 2 crianças estão mentido.

   Caso 2: Paulo mente. Esta suposição implica que Marcelo diz a verdade e que Antônio também diz a verdade. Como este último implica que Tomas mente, então também neste segundo caso 2 crianças estão mentido.

   Conclusão, em qualquer um dos casos duas crianças estão mentindo.

3. João recebeu R$ 450,00 de seu avô e pretende comprar CDs de jogos para seu Playstation 2. Sabendo que existem CDs que custam R$ 12,00 e CDs que custam R$ 18,00, qual o número mínimo de CDs que ele poderá comprar gastando todo o dinheiro? E o número máximo de CDs? É possível comprar exatamente o mesmo número de CDs de R$ 12,00 e R$ 18,00, sem sobrar troco?

Solução: Este problema pode ser encarado como otimizar a soma $x + y$ safisfazendo a equação diofantina

$$12x + 18y = 450,$$

em que x e y denotam o número de CDs de R\$ 12,00 e R\$ 18,00, respectivamente.

Porém, pode ser resovido da seguinte maneira lógica mais simples:

Ele comprará um número mínimo de CDs no caso de obtar por comprar um número máximo de CDs de R\$ 18,00. Como $450 : 18 = 25$, obtemos que 25 é o número mínimo de CDs procurado.

Por outro lado, o número máximo de CDs é obtido comprando um número mínimo de CDs de R\$ 18,00. Como o maior número múltiplo de 12 menor que $450 - 18y$ é o 432, com $432 : 12 = 36$, obtemos que $x + y = 36 + 1 = 37$ é o número máximo de CDs procurado.

Finalmente, o caso $x = y$ na equação diofantina é possível, para isto basta tomar $12x + 18x = 30x = 450$, donde $x = 15 = y$.

4. (Retirado de: Olimpíada Portuguesa de Matemática - 2004) Maria é professora de Matemática de uma turma do 5º ano de uma escola próxima a sua casa. Conferindo sua lista de presença da semana, ela reparou que na segunda-feira faltaram a sua aula 15 alunos, na terça-feira 12 e 9 na quarta-feira. O número de alunos que faltaram a sua aula pelo menos uma vez, nestes três dias, foi 22. Quantos alunos, no máximo, faltaram os três dias?

   Solução: Observamos que o número de alunos que faltaram os três dias não pode exceder 9, pois na quarta-feira, somente 9 alunos faltaram. Se estes 9 alunos que faltaram na quarta-feira também faltaram nos demais dias, então outros 6 alunos faltaram na segunda (totalizando 15) e outros 3 alunos faltaram na terça (totalizando 12). Logo, o número máximo de alunos que faltaram pelo menos um dia seria $9+ 6+ 3 = 18$ e não 22, como no enunciado do problema. Se o número de alunos que faltaram os três dias for 8, utilizando o mesmo raciocínio, teríamos 1 outro aluno que faltou na quarta, 7 outros alunos que faltaram na segunda e 4 outros alunos que faltaram na terça, totalizando $8+1+7+4 = 20$ alunos que faltaram pelo menos um dia e não 22. Agora, se 7 alunos faltaram os três dias, então outros 8 alunos faltaram na segunda, 5 na terça e 2 na quarta, totalizando $7+ 8+ 5+2 = 22$ alunos que faltaram pelo menos um dia da semana.

   Assim, o número máximo de alunos que faltaram os três dias é 7 alunos.

5. Qual é o menor número inteiro positivo que tem 7 divisores positivos?

Solução 1: Denote por x o número procurado. Fatorando em fatores primos

$$x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m},$$

com p_k e α_k, $k = 1, \cdots, m$, sendo números primos e inteiros não negativos, respectivamente. Se $x = p_1^{\alpha_1}$, os divisores de x são $1, p_1, \cdots p_1^{\alpha_1}$, logo o número de divisores de x é $\alpha_1 + 1$. No caso $x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$, segue pelo princípio da contagem que o número de divisores de x é $(\alpha_1 + 1) \times \cdots \times (\alpha_m + 1)$. No exercício, o número de divisores de x é 7, logo $7 = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_m+1)$. Como existem somente duas maneiras (a menos da ordem)de decompor o número primo 7 em fatores inteiros positivos, sem perda de generalidade podemos tomar

$$\alpha_1 + 1 = 7, \ \alpha_2 + 1 = 1, \alpha_j = 0, j = 3, \cdots m.$$

Daí $\alpha_1 = 6$ e $\alpha_2 = 0$. Portanto, obtemos o menor valor para x tomando $p_1 = 2$, isto é, $x = 2^6 = 64$.

Solução 2: (Motivada pela resolução de alunos do Colégio Itamarati - Ribeirão Preto) Usando o Lema a seguir, como 7 é um número ímpar, basta achar o menor quadrado perfeito que tenha 7 divisores. Daí obtem-se que $2^6 = 64 = 8^2$ é o menor inteiro positivo que tem 7 divisores.

Lema Seja x um número inteiro positivo. Então x tem um número ímpar de divisores se, e somente se, x é um quadrado perfeito.

Prova: Fatorando em fatores primos

$$x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m},$$

com p_k e α_k, $k = 1, \cdots, m$, sendo números primos e inteiros não negativos, respectivamente.

($\Rightarrow$) Suponha que x tenha um número ímpar de divisores. Sabemos da resolução 1 que o número de divisores de x é $(\alpha_1+1) \times \cdots \times (\alpha_m+1)$. Logo todo os números α_k, $k = 1, \cdots m$ devem ser números pares, pois se α_k fosse ímpar para algum k, $\alpha_k + 1$ seria par e o número de divisores de x $(\alpha_1 + 1) \times \cdots \times (\alpha_m + 1)$ seria par. Portanto, para cada $k = 1, \cdots m$, $\alpha_k = 2\beta_k$, com β_k inteiro positivo e

$$x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m} = p_1^{2\beta_1} p_2^{2\beta_2} \cdots p_m^{2\beta_m} = (p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_m^{\beta_m})^2.$$

($\Leftarrow$) Suponha que $x = a^2$ para algum inteiro positivo a. Escrevendo $a = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_m^{\beta_m}$, obtemos que

$$x = (p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_m^{\beta_m})^2 = p_1^{2\beta_1} p_2^{2\beta_2} \cdots p_m^{2\beta_m}.$$

Logo o número de divisores de x é o produto dos números ímpares $(2\beta_1 + 1) \times \cdots \times (2\beta_m + 1)$, o qual é um número ímpar.