IV OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DE RIBEIRÃO PRETO

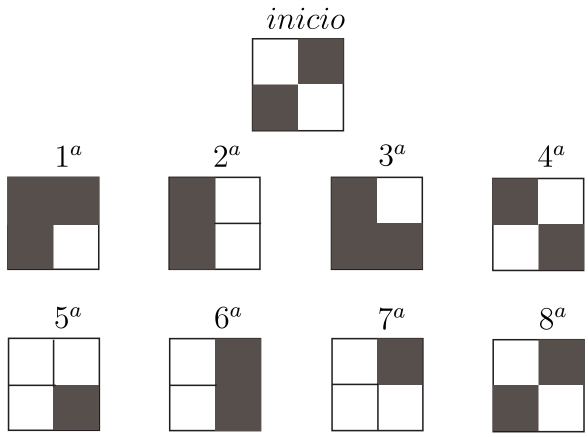
Nível I

6º e 7º ano do Ensino Fundamental

Fase Final - 28 de novembro de 2009

Gabarito Fase Final

1. Note que depois de 8 etapas o aspecto do tabuleiro será o mesmo que o do início (vide figura).



   Mais precisamente, depois de $2000 = 25 \times 8$ mudanças, o tabuleiro estará pintado como no início. As últimas 5 etapas farão com que o aspecto do tabuleiro depois de 2005 etapas seja como na quinta etapa. Portanto o tabuleiro após a etapa número 2005 terá as casas $1, 2$ e 4 pintadas de branco e a casa 3 pintada de preto.

2. Sim. Fatorando o número 441 em fatores primos obtemos

$$441 = 3^2 \times 7^2.$$

   Logo, temos duas soluções possíveis, a trivial, 441 placas de $1m^2$ e a outra composta por 49 placas de medidas 3×3, conforme fatoração acima.

3. Como para cada 4 pulos do cachorro o coelho consegue dar 5 pulos, podemos afirmar que para cada $8\,(= 2 \times 4)$ pulos do cachorro o coelho consegue dar $10\,(= 2 \times 5)$. Mas por hipótese sabe-se que 8 pulos do cachorro equivalem a 11 pulos do coelho, logo podemos concluir que para cada 10 pulos do coelho o cachorro consegue percorrer uma distância equivalente a 11 pulos do coelho. Em outras palavras, cada vez que o cachorro der 8 pulos, a distância entre ele e o coelho diminuirá um comprimento que equivale a um pulo do coelho. Portanto o cachorro poderá alcançar o coelho depois de $66 \times 8 = 528$ pulos.

4. Vamos resolver o problema primeiramente sem levar em conta as balas exigidas pelo filho de Ângela. Daí o problema se reduz a calcular o mínimo múltiplo comum (mmc), a saber,
$$mmc\{15, 25, 30\} = 150.$$
Logo, devemos adicionar a esse número $\frac{1}{10}$ de balas, isto é, $\frac{1}{10} \times 150 = 15$ que correspondem às balas exigidas pelo filho de Ângela. Portanto, 165 é o número de balas a serem compradas.

5. Lembremos que um número inteiro é múltiplo de 9 quando a soma de seus algarismos for múltiplo de 9.

   Uma vez lembrado essa propriedade iniciemos introduzindo a seguinte notação que pretende facilitar a argumentação: Para cada número inteiro positivo m, $s(m)$ denotará a soma de seus algarismos. Por exemplo $s(4) = 4$, $s(11) = 1 + 1 = 2$ e $s(2009) = 2 + 0 + 0 + 9 = 11$.

   Seja n o número que é a senha de meu cartão de crédito. Como n é múltiplo de 9 então a soma dos algarismos de n também é múltiplo de 9. Isto é,
$$s(n) \text{ é multiplo de } 9.$$
   Escrevendo $n = 9 \times k$, para algum inteiro positivo k, segue da condição do problema que
$$s(k) = s(n) - 9.$$
   Logo $s(k)$ também será múltiplo de 9 pois é igual a um número múltiplo de 9 menos 9).

   Como $n \leq 999$ (por hipótese n é um número de 3 algarismos) então
$$s(k) \leq (9 + 9 + 9) - 9 = 18$$
   Por outro lado, sabe-se que $s(k)$ é múltiplo de 9, logo as possibilidades para $s(k)$ são 9 e 18.

   Se $s(k) = 9$, então $s(n) = s(k) + 9 = 18$ e as soluções são $n = 486, 567, 648, 729$ e 972. Já se $s(k) = 18$ então $s(n) = s(k) + 9 = 27$ o que implicaria que $n = 999$. Como $n = 999$ não cumpre a condição exigida então só existem 5 possibilidades para minha senha: $n = 486, 567, 648, 729$ e 972