

Nome do Aluno: _____

Nome da Escola: _____

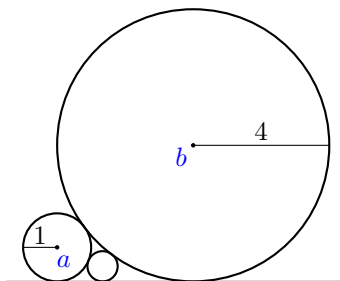
INSTRUÇÕES

1. A prova pode ser feita a lápis ou a caneta.
2. Os espaços em branco na prova podem ser usados como rascunho.
3. Ao final da prova, entregue-a ao professor.

(Cada problema vale 10 pontos. Total de pontos 50)

Escreva as soluções completas dos problemas nas folhas de respostas com sua identificação. Tudo que você escrever será levado em conta na avaliação. **Justifique cada uma das respostas.**

1. Os melhores 19 estudantes do ensino médio em Ribeirão Preto receberão uma bolsa para custear seus estudos no próximo ano. Para isto, o governo conta com R\$ 5.000,00 . Todos os meninos devem receber a mesma quantidade e todas as meninas também, porém cada menino receberá R\$ 150,00 a mais do que cada menina (por mais injusto que isso pareça). Se os valores das bolsas a serem outorgadas devem ser valores inteiros, quanto receberá cada menino e quanto receberá cada menina?
2. Dois círculos, um com centro a e raio 1 e outro com centro b e raio 4, são tangentes e dispostos de acordo com a figura abaixo. Um terceiro círculo de menor raio é tangente a estes dois círculos. Qual é o raio do menor círculo?



3. Suponha que $f_1(n) = 2n$, ou seja, f_1 é a função que duplica o seu argumento. Considere as funções

$$f_2(n) = \underbrace{(f_1 \circ \dots \circ f_1)}_n(1), \quad f_3(n) = \underbrace{(f_2 \circ \dots \circ f_2)}_n(1),$$

onde, por exemplo, $(f_1 \circ f_1)(1)$ denota a composição de f_1 com f_1 em 1, ou seja $f_1(f_1(1))$. Nesse caso $f_2(n)$ representa a composição de f_1 com f_1 n vezes em 1. Determine uma fórmula para $f_3(n)$.

4. Suponha que você está estudando o sistema numérico de uma antiga civilização da América Central. Este sistema é parecido com o nosso, porém em lugar de utilizar uma base decimal, este utiliza a base 5 (cinco) e os seguintes símbolos



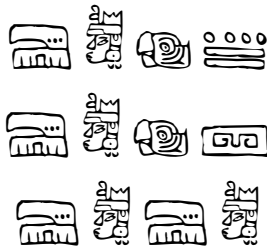
Em alguma ordem, estes símbolos correspondem aos nossos 0, 1, 2, 3, e 4. Por exemplo, o número



deve ser interpretado como

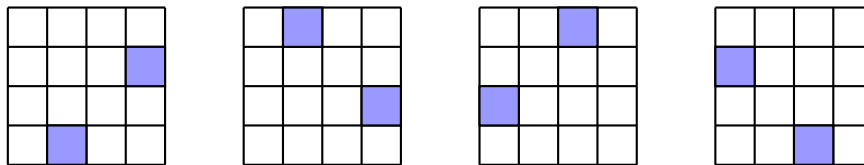
$$\text{Symbol 1} \times 5^3 + \text{Symbol 4} \times 5^2 + \text{Symbol 3} \times 5 + \text{Symbol 2}.$$

O problema é que a correspondência exata entre os símbolos e os algarismos é desconhecida. No entanto, descobriu-se que os seguintes três números (um por linha)












são consecutivos e estão ordenados em ordem crescente, de cima para baixo. Determine o valor de cada símbolo e os três números indicados acima.¹

5. Luiz tem um tabuleiro 4×4 branco formado por quadrados e deseja colorir dois destes quadrados de azul. Duas formas de colorir o tabuleiro são consideradas equivalentes se uma pode ser obtida da outra ao rotacionar em 90° o tabuleiro. Por exemplo, a figura abaixo apresenta quatro formas equivalentes:



De quantas maneiras *não equivalentes* pode ser colorido o tabuleiro?

¹Os símbolos utilizados nesta pergunta estão baseados em verdadeiros caracteres utilizados pelos Olmecas, a qual talvez seja a primeira civilização da América (1500 - 400 AC). Na verdade, os Olmecas utilizavam um sistema numérico em base 20 e os símbolos eram  para o 0,  para o 1,  para o 2,  para o 3,  para o 4,  para o 5,  para o 6, ...,  para o 9,  para o 10, ... Este sistema foi posteriormente adotado pelos Maias.